

2. série IV. ročníku kategorie JUNIOR Řešení zasílej do 25. listopadu 2005

Sluneční paprsky se opatrně vkrádaly do pracovny Bářina tatínka v Centrální vědecké knihovně. Nikomu ze tří kamarádů se vůbec vstávat nechtělo. Byly přece prázdniny a to každý správný školák pěkně vospává. Matěje, Báru a Kosa ale čekaly důležité úkoly. Nesměli promarnit ani chvíli. Lidstvu hrozilo děsivé nebezpečí.

„Kluci, vstávejte, máme nejvyšší čas,“ budila Matěje a Kosa Bára. „Trochu se nasnídáme a hned vyrazíme.“

„Co myslíte, kam bychom se měli podívat dneska?“ ptal se Matěj.

„Řekl bych, že máme ještě spoustu práce v Řecku,“ přemýšlel Kos. „Tam byly vlastně položeny základy matematiky a všech ostatních věd.“

„To je pravda, ověříme si to u Moudrovouse,“ vyndavala Bára zrcátko.

„Máte pravdu, moji milí, dnes vás čeká návštěva velkého Eukleida¹!“ přivítal je čaroděj.

„Tak to musíme zase do prvního poschodí,“ vysvětlovala Bára.

„Ale tentokrát se musíme líp koukat pod nohy,“ vzpomínal Matěj na včerejší pád pod podlahu.

Sbalili si své věci a vydali se znovu do prvního patra, do oddělení řeckých filosofů. Moudrovous jim mezitím líčil, co Zlovus provedl Eukleidovi. Vzhledem k tomu, že Eukleides, autor slavných Základů, dal světu vzor, jak budovat vědecké teorie, byl Zlovusův kousek strašlivý. Nechal totiž Eukleida uvěznit a tak mu zabránil v jeho díle. Tím by mohlo lidstvo zaostat ve svém vývoji o dva tisíce let. Nastražil to tak, že císař nechal Euklida za jeho „marinivé počínání v matematice“ zavřít do sklepení a má v úmyslu spálit jeho svitky.

„Báro, tohle je ta správná kniha,“ připravoval Matěj sáček s dějovým práškem a poprášil jím první stránky.

Ocitli se před alexandrijským Múseiem.² Kamarádi si nevěděli příliš rady, jak Eukleida osvobodit.

„Nejlepší bude, když se dostaneme přímo k císaři a vyprosíme Eukleidovi milost,“ navrhoval Kos.

¹Řecký matematik, který žil kolem r. 365-300 př. n. l.; Je autorem třináctisvazkového díla Základy, které je nejspíš doposud nejvydávanější knihou po Bibli.

²Múseion byl slavným vědeckým centrem a velkolepou knihovnou starověkého města Alexandrie, které založil Alexandr Veliký na severu dnešního Egypta.

„Ale jak se k němu dostaneme?“ přemýšlel Matěj, „mohli bychom se vydávat za učence z dalekých zemí a nachytat ho na něco z budoucnosti.“

„To by možná šlo, ale musíme být opatrní,“ připomínala všem Bára, „po nás se musí historie odehrát tak, jako bychom tu nikdy nebyli, nebo aspoň skoro nebyli.“

Vstup do paláce proběhl hladce. Ujal se jich nějaký voják a vedl je k císaři. Došel s nimi do velké předsíně a dával pokyny nějakému sloužícímu.

„Učenci,“ začal se smát, „tak to bude mít císař radost.“ Chechtal se jak pominutý a voják s ním. Kamarádi na sebe nechápavě koukali. „Jsem zvědav, jestli je jen vyžene, nebo je předhodí lvům, mívá po tom lepší náladu.“

Zdálo se, že se nachomítli k něčemu, po čem až tak neprahli. Císař chodil sem a tam, rozbíjel krásné vázy a zlostně nadával na Eukleida.

„Aha, další učenci,“ spustil císař a Matěj, Bára i Kos se hluboce poklonili. „To jsem zvědav, co mi povíte. Ten zpropadený Eukleides a jeho povyšování.“

„Promiň, císaři, pověz nám, co se stalo,“ osmělila se Bára.

„Víte dobře, co se stalo, Eukleides se rouhal bohům. Všude vykřikoval, že je nekonečně mnoho prvočísel a to rozlobilo mocného Dia, protože takové pravdy může znát jen bůh. Ale Eukleides si nedal říct a tak se Zeus začal mstít. Sužuje moře hroznými bouřemi. Dal jsem Eukleida uvěznit a slíbil jsem, že spálím jeho svitky, ale Dia to neusmířilo. Pak se mi zjevila Pallas Athena a zadala mi úkol. Pokud ho vyřeším, bohyně Dia uprosí. Pokud ho nevyřeším, nesmím s Eukleidem nijak nakládat a jsem zatracen.“

Kamarádům bylo jasné, že to nebyl žádný Zeus, ale Zlovus. Naštěstí zasáhl i Moudrovous, jako Pallas Athena.

„Mohli bychom ti s tou úlohou pomoci?“ neváhal Matěj.

„Snad proto jste tady! Pokud mi poradíte správně, splním vám jakékoli přání. Pokud si ale rady vědět nebudete, hodím vás lvům, už mám dost všech těch vandráků, kteří mě jen zdržují.“

J-IV-2-1

Nachází se mezi čísla

9, 98, 987, ..., 9876543210, 98765432109, 987654321098, ... atd.

nějaké prvočíslo? Své tvrzení zdůvodněte!

Nebyla to jednoduchá úloha. Kamarádi se sesedli a dali se do uvažování. Jak to mají zjistit, když je těch čísel nekonečně mnoho? Vzpomínali, jaká znají pravidla pro dělitelnost. Pomalu si ujasňovali, která z čísel jsou něčím dělitelná. A nakonec úlohu úspěšně vyřešili!

„Jsem mile potěšen, že jsem se ve vás mýlil,“ uznale pokyvoval císař hlavou. „Dobře zvažte, jakou chcete odměnu.“

Kamarádi nic zvažovat nemuseli. Odměna byla jasná.

„Chtěli bychom, abyste propustil Eukleida,“ nezaváhala Bára.

„Cože?!“ zaburácel císař, „Toho šejdíře, toho ničemu? Nikdy!“

„Ale slíbil jsi, že nám splníš jakékoli přání, když úlohu vyřešíme, a my ji vyřešili,“ nedal se Matěj.

„Ano, ale takové přání, které mohu splnit.“

„Ale vždyť toto přání splnit můžeš,“ namítl Kos. A dodal: „Jsi přece císař.“

Císař chvíli přecházel tiše po komnatě. Teprve teď si kamarádi uvědomili, že nemohl být o moc starší, než oni sami.

„Dobrá, propustím ho, ale jedině, když vyřešíte ještě jednu úlohu.“

„To jsme si ale nedomluvili,“ namítal Kos.

„No, víte, já se s Eukleidem nemůžu setkat, dokud nebudu znát řešení téhle úlohy. On by si pak myslel, že jsem ho zavřel kvůli tomu, ale to bylo opravdu kvůli Diovi.“

„Už to chápu, Eukleides je tvůj učitel a ty musíš dodělat domácí úkol,“ smála se Bára. „Tak sem s ním!“

J-IV-2-2

Je dán čtverec $ABCD$ a bod X na jeho straně BC . Jaký je poměr obsahu trojúhelníku ABX ku obsahu čtverce $ABCD$, když obvod trojúhelníku ABX je ku obvodu čtverce $ABCD$ v poměru $3 : 4$?

„Musím uznat, že Eukleides si na tebe vymyslel pěknou úlohu,“ usmíval se Kos. „Nemůžeme ji ale vyřešit jen tak a pak ti dát řešení. To by nebylo fér. Vyřešíme ji společně.“ A tak se dali do řešení i s císařem. Bylo znát, že je žákem jednoho z největších matematiků všech dob. Když byli s úlohou hotovi, císař dodržel slovo a poslal sluhy, aby Eukleida propustili.

Zanedlouho se vrátili, ale bez něj.

„Kde je?“ ptala se Bára.

„Eukleides děkuje císaři za jeho laskavost. Mám ale vyřídít, že odchází do ústraní a matematice se již věnovat nebude, aby nepohněval císaře a mocné bohy,“ vyřizoval sluha vzkaz.

„Ten paličák, já mu ukážu!“ rozkřičel se císař.

„Spíš by ses mu měl omluvit. Jeho matematika bohy jistě nepohněvala, spíš naopak. Proč myslíš, že ti Pallas Athena zadala tu úlohu. Myslím si,

jestli to spíš nebyla od bohů zkouška, jak obstojíš,“ spekuloval Matěj.

„To by mohla být pravda, ale co teď?“ vyděsil se císař.

„Pošli pro Eukleida a omluv se mu, hrozně jsi mu ukřivdil,“ navrhol Kos.

„Já, císař, že se mám omlouvat?“ pýřil se.

„To ještě žádnému císaři neublížilo, spíš naopak. Alespoň dokážeš, že si moudrosti vážíš a tak nejlépe bohy uctíš,“ pokračoval Kos.

„Víš co, napiš mu dopis a my mu ho odnesem,“ napadlo Matěje.

Tak se císař dal do psaní, opatřil dopis pečeti a vypravil poselství k Eukleidovi. Kamarádi se vydali do ulic Alexandrie. Kde ale Eukleida hledat? Poptali se po okolí a jeden mládenec je odvedl k pěknému bílému domku.

„Tak vy mi nesete dopis od císaře?“ přijal je Eukleides. „Je mi líto, ale já se tam už nevrátím. Mám s matematikou jen potíže.“

„To přece nemůžete! Vždyť je ještě tolik problémů, které musíte vyřešit,“ namítala Bára.

„To je pravda, ale ve vězení jsem vše zapomněl, a vymýšlet to znovu se mi nechce.“

„Tomu nevěříme, matematik, jako vy, by nevydržel nic nedělat,“ kroutil Matěj hlavou.

„A i kdybyste něco zapomněl, hned jak to znovu uvidíte, zase si vzpomenete,“ ponoukal Eukleida Kos. „Tak schválně, nad čím jste přemýšlel naposledy?“

„Tak tedy dobrá, já to ještě zkusím. Poslouchejte:“

Z_+

J-IV-2-3

Jsou dány body T, X, Y, Z jak je uvedeno na obrázku. Má se sestrojít čtverec $ABCD$ tak, aby $X \in \leftrightarrow AC, Y \in \leftrightarrow BD, Z \in \leftrightarrow DC$ a $T \in \leftrightarrow BD$.

T_+

X_+

$+Y$

„Koukám, že máte zálibu v úlohách o čtvercích,“ usmála se Bára, „pojdte, dáme se do toho.“ Společně úlohu řešili a nakonec i vyřešili. Eukleidovi se do očí vracel šibalský jas.

„Byla to pěkná úloha a pěkně jsem si s vámi popovídal. Je vidět, že máte dobré vzdělání,“ pokyvoval Eukleides uznale hlavou. „Ale řekněte mi, co z

toho budu mít, když se do Múseionu vrátím. Císař se brzy vrátí ke svým zvykům a já se s ním budu trápit jako dřív.“

„Víte, vy jste mistr s pravítkem a kružítkem, nad kterého není. Hádám, že jednou se bude tomuto umění říkat právě po vás Eukleidovská konstrukce,“ povzbuzoval ho Matěj.

„A nedivil bych se, kdyby některé věty, třeba o trojúhelnících, nesly jméno po velkém Eukleidovi,“ přidal se Kos.

Eukleides se usmíval. „Myslíte? To by bylo pěkné.“

„Hlavně to všechno musíte sepsat!“ připomněla Bára. „Pěkně od začátku do konce, všechno, co znáte a nač jste přišel. A bylo by lepší, aby se napsalo víc kopií, kdyby náhodou přišla nějaká katastrofa.“

„No tak vám pěkně děkuji za rady. Půjdete se mnou k císaři?“

„Moc rádi bychom šli, ale chceme se setkat ještě s několika dalšími učenci, tak musíme jít,“ omlouval všechny Kos.

„To je škoda. Moc vám děkuji a přeji šťastnou cestu. Klidně si tu odpočíte, já teď půjdu do paláce.“ Eukleides odešel a kamarádi zůstali v jeho domě.

„Tedy pánové, to jsem nevěděla, že jste takoví jasnovidci,“ uchichla se Bára. „Hádám, že jednou . . ., a nedivil bych se, kdyby . . ., kam na to chodíte?“

„Žádala to situace,“ smál se Matěj, „pojdte, vrátíme se, Eukleides už je zase na správné cestě.“ Hodil dějový prášek za záda a vrátili se do knihovny.

„Matěji, kde je Bára,“ rozhlížel se Kos dokola. Bára v knihovně nebyla.

„Asi zůstala v knize, musíme hned za ní!“ Matěj rychle posypal otevřené stránky. Byli zpět v Eukleidově domě, ale Bára nikde. Slyšeli jen ryk z ulice. Vyběhli ven a viděli, jak Báru odvázejí na voze neznámo kam. „Leť za nimi, nesmíš je ztratit. Já zatím zjistím, co jsou zač a jak Báru osvobodit.“ Kos Matěje poslechl a Matěj se zastavil u obchodníka s kůží. Vyzvěděl od něj, že to jsou vojáci, kteří chytají uprchlé otroky, ty pak odvádějí na práce do hor do lomů. To je strašlivé, jak se tam Bára ocitla?

Kos se vrátil: „Odvedli je do amfiteatru. Zítra je prý budou soudit a pak je pošlou buď zpět ke jejich majitelům nebo do lomu.“

„Musíme tam odtud Báru dostat. Jak si mohli myslet, že je uprchlá otrokyně?“

Dostali se až k prefektovi: „Co by sis přál, občane?“ Jeho tón zněl ironicky a povýšeně.

„Máte jednu mou otrokyni,“ lhal Matěj, „poslal jsem ji za matematikem Eukleidem a když se od něj vracela, vy jste ji zatkli.“

„To bys musel dokázat, že je to tvoje otrokyně.“

„Jak bych to měl dokázat?“ ptal se Matěj.

„Co u tebe dělala?“

„Rýsovala konstrukce, dělala pomocné výpočty a tak podobně,“ nenechal se Matěj zaskočit, „jsem totiž učenec.“

„Hmm, zajímavé,“ na chvíli se odmlčel a pak pokračoval: „když mi dáš matematickou úlohu, kterou já nevyřeším, ale ona ano, pak uvěřím, že je to tvá otrokyně a propustím ji.“

Matěj si to musel pořádně promyslet. Vrátil se do Eukleidova domu a společně s Kosem našli v Eukleidových svitcích úlohu, kterou donesli prefektovi.

J-IV-2-4

Narýsuj takový obdélník $ABCD$, jehož délka kratší strany se rovná délce delší strany jemu vepsaného obdélníku $EFGH$, přičemž E a G jsou středy stran AD a BC .

Prefekt kroutil hlavou, „To je zajímavé. To není snadná úloha, tak to jsem na ni zvědav,“ s těmi slovy odešel za Bárou.

Bára se dala hned do rýsování. Bylo jasné, že ví, co a jak. Hravě si s úlohou poradila a prefekt musel uznat, že se Bára v konstrukcích vyzná. Nechal ji předvést před Matěje.

„Tady ji máš,“ mluvil přísně, „a nauč ji slušnému chování. Byla drzá na strážě!“

„Už se to nebude opakovat, tím si buď jist,“ odpověděl směle Matěj. Obrátil se na Báru a Kosa: „Tak honem, zmizíme odsud!“

„Matěji počkej,“ ozvala se Bára, „strážní mi vzali mé zrcátko!“

„A co s ním udělali?“

„Myslím, že ho prodali vetešníkoví na bazaru.“

„Tak rychle na bazar, s Moudrovousem musíme být ve spojení,“ vyletěl vpřed Kos. Bára a Matěj běželi za ním. Zanedlouho vetešníka našli. Zrcátko měl vystavené mezi ostatním harampádím.

„Čím vám mohu posloužit, vzácní občané,“ nabízel jim vetešník své zboží.

„Mně se líbí tohle zrcátko, kolik za něj chceš?“ ptala se Bára.

„To je za 20 cistercií, je to vzácnost. Práce z dalekého východu.“ Kamarádi se na sebe podívali, co ten si nenavymýšlí.

„To by nešlo, to je moc drahé, pojd' půjdeme,“ odpověděl Matěj Báře a ta se úplně vylekala.

Vetešník ale spustil: „Takovou vzácnost byste neměli ztratit, že jste to vy,

prodám vám ho jen za 15 cistercií.“ Tak to šlo dál a dál, povídali si spolu až nakonec vetešník zůstal u ceny 5 cistercií.

Matěj ale věděl, že nemají žádné peníze, a tak hrál dál: „No, víš, já myslím, že takovou věc vlastně ani nepotřebujeme. Rád jsem si s tebou popovídal, ale už budeme muset dál. Náš čas je drahý.“

Vetešník Matěje ale stejně zastavil: „Tak víte co, když jste ti učenci, jestli mi poradíte s jedním problémem, tak vám to zrcátko daruji.“

„Ujednáno,“ usmála se Bára, „tak povídej.“

J-IV-2-5

Na ostrově Matikos je šest měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s dalšími čtyřmi městy. Tyto cesty se nikde nekříží. Zajímavé je to, že všechny cesty mají jednu ze tří různých délek. Nejkratší měří 10 km, nejdelší 40 km. Kolik měří zbývající cesty?

To nebyla jednoduchá úloha. Nejtěžší bylo zjistit, jak musí být města na ostrově rozmístěna. Když na to kamarádi přišli, spočítali už zbývající délku hravě. Vetešník byl s jejich odpovědí spokojený a dal jim slíbené zrcátko. Vydali se hledat nějaké odlehlejší místo, aby se mohli vrátit zpět do současnosti.

„Pojďte sem za stromy, tady nás nikdo neuvidí,“ svolal Matěj všechny dohromady.

„Matěji, Báro, raději se přitiskněte k sobě, já si sednu Matějovi na rameno, ať se zase někdo neztratí.“ Matěj hodil trochu dějového prášku za záda. V ten okamžik stáli všichni v knihovně.

„Tedy řeknu vám, že dnes bylo těch zážitků víc než dost!“ oprašovala si Bára prach ze šatů.

„Nahnalas nám strach, vůbec jsme s Kosem nevěděli, co s tebou chtějí dělat.“

„Jen tak tak jsi unikla od cesty do lomů. Matěj musel tvrdit, že jsi jeho otrokyně.“

Ještě si dlouho povídali, co se vše stalo a co se vše mohlo stát. Pomalu došli do pracovny Bářina tatínka a uložili se ke spánku. Zítra je čekal další perný den!