

Zadání 2. série VI. ročníku kategorie JUNIOR
Svá řešení zasílejte do 16. prosince 2007

Hned po ránu vzbudil Moudrovous všechny spáče. Na Kosa dolehl strach z dnešních kouzelnických zkoušek a skoro nemluvil. „Báro, Matěji, jděte nasbírat dříví na oheň a vezte s sebou Kosa. Procházka lesem mu pročistí hlavu,“ nakázal Moudrovous. Jak postupovali hlouběji do lesa, Kos očividně pookřál. Dokonce prohodil i několik vtipů. Dříví měli nasbírané a tak se vydali nazpět.

„Podívejte, tady někdo bydlí!“ zvolala Bára, když si jako jediná všimla srubu na pasece blízko cesty.

„Pojďme se tam podívat,“ navrhl Kos. Když přišli ke srubu, zjevil se před nimi mladý kouzelník a řekl: „Pojďte dál přátelé a zase zmizel.“

Bára s Matějem nevěřičně koukali do prázdna, kde ještě před chvílíkou stál onen kouzelník. „To je kouzlo neviditelnosti,“ vysvětlil jim Kos.

Vešli dovnitř a znovu údivem oněměli. U stolu seděli tři naprosto totožní kouzelníci. „Co je to za mocné kouzlo?“ zeptal se Kos. Postavy se začali hlasitě smát a pak jedna z nich odpověděla: „To není žádné kouzlo. Já jsem Adalbert a toto jsou mí bratři Bertram a Celestýn.“ Pak se zahleděl na Kosa a se znatelným potěšením v hlase dodal: „Ty jsi ten učedník Moudrovouse a vy musíte být jeho přátelé!“ Kos byl překvapen a proto se představování ujala Bára: Já jsem Bára, tohle je Matěj a tohle je opravdu Moudrovousův učedník Kos. Dnes bude skládat zkoušky.

V tu chvíli vstal Celestýn a rozvážně pravil: Jestliže jsi Moudrovousův učeník, jistě nebudeš mít problém vyřešit tuto hádanku.

J-VI-2-1

Dva z nás umí být neviditelní. Dva z nás se umí proměnit na zvíře. Dva z nás umí létat a dva z nás dokáží protivníka proměnit v kámen. Žádný z nás ale neumí více než tři z těchto kouzel. O Adalbertovi víme, že jestliže dokáže být neviditelný, dokáže také proměňovat v kámen. O Bertramovi víme stejně jako o Celestýnovi, že umí-li se proměnit ve zvíře, tak i létat. O Celestýnovi stejně jako o Adalbertovi víme, že umí-li proměnit někoho v kámen, umí také létat.

Když uhádneš, který z nás neumí proměňovat v kámen, naučíme tě jedno z našich kouzel.

Kos si všechny uvedené podmínky uspořádal v hlavě a již Celestýnovi šeptal správnou odpověď. „Výborně! Které kouzlo chceš, abychom tě naučili?“

„Vem si proměňování v kámen,“ poradil mu Matěj, „jsi pták, takže létat umíš a zvířetem jsi taky. Jsi docela malý, takže si tě kolikrát ani nikdo nevšimne. To kamenění by se ti ale mohlo hodit. Ale na mně si to nezkoušej!“

Kos se tedy naučil proměňování v kámen a pak se všichni tři rychlým krokem odebrali za Moudrovousem. Ten je přivítal pokáráním: „Jdete pozdě, už musíme vyrazit na zkoušky, nasnídáme se až v Neznabozích, ale musíme si pospíšet.“

Dorazili do cíle a zjistili, že zkoušky jsou o půl hodiny odloženy. Stáli vedle jídelního automatu a všichni si uvědomili, že mají hlad. Moudrovous sáhl do kapsy pro peníze, ale nahmatal pouze díru. „Snídaně nebude,“ zachmuřil se.

„Když mi pomůžete, dám vám snídani zadarmo.“ Matěj dnes již podruhé udiveně zíral. Mluvicí automat viděl poprvé. „Tak tedy poslouvejte, tuto úlohu se snažím vyřešit již čtvrtým rokem.“

J-VI-2-2

*Napíšeme-li k jakémukoli přirozenému číslu číslo, které se liší v pozici cifer, pak rozdíl menšího z čísel od většího čísla je vždy dělitelný devíti. Vysvětlete mi, proč!*¹

„Počkej, to není zas tak lehké, dej nám chvíli. To si musíme rozmyslet,“ řekla Bára. I když jim úloha dala zabrat, stihli automatu řešení vysvětlit a dokonce i posnídat.

„To byla dobrota a úplně zadarmo.“ zaradoval se Matěj.

„Zadarmo?“ podivil se Kos, „za pěkně těžkou úlohu!“

„Ahoj! Slyšeli jste to?“ Otočili se a viděli, jak k nim běží Celestýn. Nebo snad Bertram?

„Ahoj Adalberte, co jsme měli slyšet?“ pozdravil příchozího Moudrovous.

„Zkoušky byly odloženy, protože někdo očaroval zrcadlo. Kouzelníci se snaží zjistit kdo, anebo alespoň jakým kouzlem bylo zrcadlo očarováno. Mohlo by to být pro kouzelnické adepty nebezpečné,“ vysvětloval Adalbert.

„Prosíme kouzelnické adepty, aby se dostavili ke zkoušce zrcadlem. Prosíme kouzelnické adepty, aby se dostavili ke zkoušce zrcadlem. Konec hlášení.“ zachraptělo z reproduktoru, který jen tak poletoval vzduchem.

„Nuže pojďme, jen doufám, že se jim podařilo zrcadlo odčarovat,“ řekl poněkud nejistým hlasem Moudrovous.

¹Příklad: $7\ 066\ 834 - 4\ 678\ 306 = 2\ 388\ 528 = 9 \cdot 265\ 392$, ciferný součet čísla 7 066 834 je $7 + 0 + 6 + 6 + 8 + 3 + 4 = 34$. Návod: Vypočtete nejprve zbytek po dělení devíti obou přirozených čísel a také jejich ciferných součtů.

Kos měl jít na řadu jako první. Moudrovous mu vysvětlil, v čem spočívá zkouška zrcadlem. Jde o to, že některá zrcadla jsou zlá a dokáží i zabít. Mají ovšem pouze omezený prostor, kde mohou zaútočit. Když kolem něj chce kdokoli projít, musí si uvědomit, odkud svítí slunce a jaký má zrcadlo tvar. Tedy přesně vypočítat, jaké má zrcadlo zorné pole. Cílem tedy je dostat se co nejbližší zrcadlu, aby šlo odčarovat, ale nevstoupit do jeho zorného pole.

Tři zrcadla u zkoušek tvoří rovnoramenný trojúhelník ABC . Kos ví, kde leží bod S , který označuje střed základny AB , a bod D , což je průsečík osy úhlu při vrcholu A a výšky na základnu. Nic dalšího o zrcadlovém trojúhelníku ale neví. Kos musí být někde uprostřed mezi zrcadly a vždy dojít co nejbližší k některému z nich, ale nesmí se dostat do zorného pole dvou zrcadel, to znamená do obvodu zrcadlového trojúhelníku. Kamarádi mu musí tedy poradit, kam se postavit.

J-VI-2-3

první část

Je dána úsečka SD , $|SD| = 16\text{m}$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC takový, že bod S je středem jeho základny AB a bod D je průsečíkem výšky na tuto základnu a osy úhlu u vrcholu A ?

druhá část

Představte si, že budeme vrcholem C pohybovat tak, aby trojúhelník ABC stále splňoval všechny podmínky ze zadání. Jaký geometrický útvar vyplní všechny obvody takových trojúhelníků ABC ?

J-VI-2-4

Jaký je obsah vnitřní plochy vymezené obvodů všech takových rovnoramenných trojúhelníků ABC z předcházející úlohy?

Kos se vydal plnit svůj úkol. Postupoval kupředu. Bára si všimla, že v davu přihlížejících je i onen stín, který je předcházející den spoutal a který se snažil Kosovi pokazit zkoušku. Zrovna to chtěla říci Moudrovousovi, když se zahřmělo. To, co Bára neviděla, ale ostatní přihlížející viděli, byla hrůzostrašná podívaná. Ze zrcadla vystřelil blesk směrem na Kosa. Ten jentaktak uskočil a tam, kde předtím stál, byl nyní jen malý kráter.

Moudrovous rychle zakouznil ochranné kouzlo a zavolal na Kosa: „Znič to zrcadlo! Moje kouzlo tě na několik vteřin ochrání před blesky!“

Kos usilovně přemýšlel jak zničit zrcadlo, vždyť zobákem ho nerozklovne. Pak dostal nápad. Vzlétl a co nejrychleji se rozletěl k zrcadlu, jak nejbližší

mohl. Těsně před tím, než by se mohl dostat do jeho zorného pole, vyslovil zaklínadlo. Zrcadlo se roztříštilo a Kos, tedy vlastně nyní kus kamene, dopadl mezi střepy na zem. Nastal zmatek. Nikdo nevěděl, co se stalo. Takto zkouška probíhat neměla.

Moudrovous, Bára a Matěj doběhli ke Kosovi a Moudrovous Kosa odčaroval. „Jsi v pořádku?!“ ptali se všichni s obavou. „Jsem, ale jaktože zrcadlo zaútočilo? Vždyť jsem byl ještě dost daleko.“ Moudrovous poklekl ke střepům a prohlížel si je. Pak vyslovil svoji teorii: „Zrcadlo bylo očarované aby místo pouhého označení zkoušených adeptů, vystřelovalo blesky, to je jasné. Navíc, z tvarů střepů lze poznat, že bylo i očarováno, aby nebylo rovné, ale vypouklé a tedy i jeho zorné pole bylo větší a proto vystřelilo dříve, než mělo. Ale kdo to mohl udělat?“

Bára s Matějem nyní Moudrovousovi řekli vše o neznámém stínu, který je sledoval již ve vlaku, pak se pokusil překazit první zkoušku a pak je zajal a svázal a nakonec byl viděn i u této zkoušky. „To je zlé,“ řekl Moudrovous. „Musíme zjistit, kdo chce Kosovi ublížit. Hned zítra se pustíme do pátrání.“

Kos, který se stal hrdinou dne, byl ve svém živlu. Mnoho lidí na něj mávalo a ukazovalo. Příbuzní ostatních adeptů mu děkovali, že šel první na zkoušku a že ochránil ostatní adepty před nehodou.

„Víte, když se proměníte v kámen, tak vám opravdu velmi vyhládne. Nedáme si něco do zobáčku?“ ospravedlňoval svůj hlad Kos.

„To bychom rádi, ale nemáme co,“ vysvětlovala Bára.

„Á, tady jste,“ přispěchal k nim nejspíše Celestýn. „Nejvyšší sudí vás zve na večeři. Moc děkuje za tvou pomoc, Kosi. Tady máte lísteček na jídlo, s ním si jděte tam do té krčmy. A dobrou chuť.“

„Děkujeme,“ usmíval se Moudrovous a byl na Kosa náramně hrdý. „Zítra na viděnou.“ A pak otočil lístek. Stálo na něm:

J-VI-2-5

Najděte šesticiferný palindrom², jehož první trojčíslí je dvakrát větší než druhé trojčíslí³.

„Co to má být?“ divil se Kos „Ale nevádí, já mám takový hlad, že bych pro kousek chleba vyřešil takových úloh třeba deset.“ Pustil se do úlohy s

²Palindrom je takové číslo, které se odpředu čte stejně jako odzadu. Podobně jako u palindromických vět jako je např. Báře jede jeřáb. Příkladem nějakého šesticiferného palindromu je číslo 647 746.

³První trojčíslí předcházejícího palindromu je 647 a druhé trojčíslí je 746. (Rozhodně to tedy není hledaný palindrom, protože $647 \neq 2 \cdot 746$.)

takovou vervou, že ji měl vážně za chvíličku hotovou. Ale z výsledku moc nadšený nebyl.

„Víš co,“ navrhl Matěj, „pojďme se tam podívat a uvidíme.“ Kosovi spadl ze srdce kámen snad ještě větší, než ve který se sám před tím proměnil, když v křčmě uviděl cedulku: „Lístky bez čísla – výběr volný“.

Tak dobrou večeri neměli už dlouho. Došli pomalu zpátky do tábořiště a šli spát. Ale neusínalo se jim dobře. Všichni přemýšleli, kdo chce Kosovi ublížit. Jen Kos usnul rychle, protože měl za sebou opravdu perný den.