Řešení 1. série

Řešení J-I-1-1

Ciferník lze rozdělit na tři části tak, že

1. počty čísel v jednotlivých částech jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla

$$(x-1)+x+(x+1)=12,$$

odtud

$$x=4.$$

Počet tří po sobě jdoucích čísel v jednotlivých částech ciferníku je tedy 3, 4, 5.

2. Součty čísel ciferníku v jednotlivých částech dávají tři po sobě jdoucí přirozená čísla

$$(y-1)+y+(y+1)=1+2+3+..+11+12=78,$$

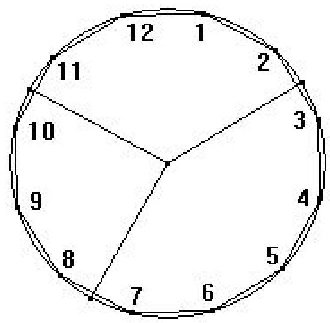
tedy

$$y=26.$$

Součty tří po sobě jdoucích čísel jsou tedy 25, 26, 27.

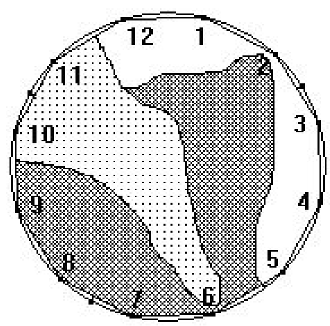
Postup pro rozdělení ciferníku: Čáru musíme vést právě mezi 10 a 11, protože $10+11+9>27$ a i $10+11+12>27$. Dál $11+12+1<25$; $11+12+1+2=26$; $11+12+2+3>27$. Proto další rozdělení musíme udělat mezi čísly 2 a 3. Rozdělení mezi 8 a 7 už je jediné možné.

Řešení:



Jiné řešení:

Podmínky zadání splňuje i toto rozdělení ciferníku. Takových řešení je více.



Řešení J-I-1-2

Nejprve si uvědomme, že $H = 1$, G je sudé číslo a proto $B \in \{2, 3, 4\}$ a tedy $G \in \{4, 6, 8\}$.

Dále víme, že HJ je násobkem G. Postupným vylučováním nevhodných kombinací získáme jediné řešení:

5	+	4	=	9
-		+		+
3	+	4	=	7
2	.	8	=	16

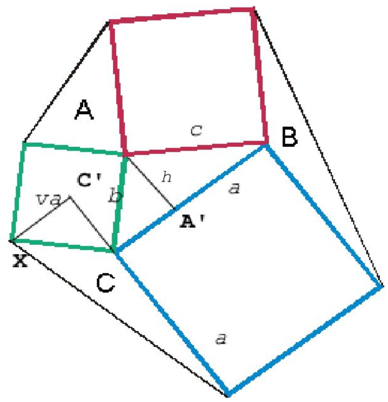
Řešení J-I-1-3

Označme si trojúhelníky nad vrcholy trojúhelníka ABC po řadě $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$ a jejich obsahy S_A, S_B, S_C. Naším úkolem je určit vztah mezi S_A, S_B, S_C.

Pro obsah $\triangle C$ platí

$$S_C = \frac{a v_a}{2},$$

kde a má velikost strany CB a v_a je výška na stranu a v $\triangle A$.



Ukážeme nejprve, že trojúhelníky $CC'X$ a $CA'A$ jsou shodné.

- Strany CX a CA jsou stranami čtverce, tedy

$$|CX| = b = |CA|.$$

- Oba trojúhelníky mají pravý úhel, $\triangle CC'X$ u vrcholu C' a $\triangle CA'A$ u vrcholu A', neboť tyto body jsou patami výšek v $\triangle C$ a v $\triangle ABC$.

- Protože úhly XCA a $A'CC'$ jsou pravé, odečteme-li od obou úhlů úhel $C'CA$, dostáváme po řadě úhly XCC' a ACA'. Neboli pro velikosti úhlů platí

$$|\angle XCC'| = |\angle ACA'|.$$

Odtud již podle věty *usu* dostáváme, že jsou trojúhelníky shodné, což znamená, že

$$v_a = |XC'| = |AA'| = h,$$

kde h je výška $\triangle ABC$ na stranu a. Pro obsah tedy dostáváme

$$S_C = \frac{ah}{2}.$$

A označíme-li S obsah $\triangle ABC$, dostaneme

$$S_C = S.$$

Provedeme-li stejnou úvahu i pro $\triangle A$ a $\triangle B$ dostáváme tyto rovnosti

$$S_A = S$$

a také

$$S_B = S.$$

Odtud již plyne, že

$$S_A = S_B = S_C$$

Neboli, že obsahy všech trojúhelníků si jsou navzájem rovny.

Řešení J-I-1-4

Celkový počet jablek označíme x. Kdyby byl počet jablek zvětšen o jedno, jejich počet by byl $(x+1)$ a jablka by se dala rozdělit do sáčků přesně, aniž by nějaké zbylo. Jinými slovy číslo $(x+1)$ je dělitelné čísly $10, 9, 8, 7, 6, \ldots, 2$. Protože toto číslo má být nejmenší takové, hledáme nejmenší společný násobek $n(10, 9, 8, 7, 6, \ldots, 2)$:

$$10 = 2.5,$$

$$9 = 3.3,$$

$$8 = 2.2.2,$$

$$7 = 7,$$

$$6 = 2.3,$$

$$5 = 5,$$

$$4 = 2.2,$$

$$3 = 3,$$

$$2 = 2.$$

Tedy

$$n(10, 9, 8, 7, 6, ., 2) = 2.2.2.3.3.5.7.$$

Nyní už můžeme vypočítat, že

$$(x+1) = 8.9.5.7,$$

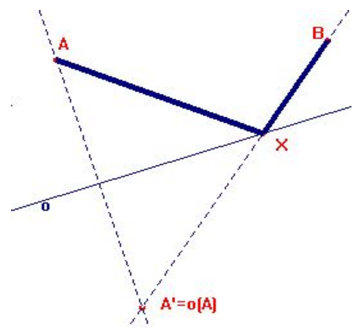
$$(x+1) = 2520,$$

$$x = 2519.$$

Nejmenší možný počet natrhaných jablek je 2519.

Řešení J-I-1-5

Nejprve je nutné uvědomit si, že nejkratší spojnicí mezi dvěma body je přímka. My ale dva body nemůže spojit přímo, ale musíme se nejprve dotknout dané přímky. Využijeme-li vlastností osové souměrnosti, pak libovolné dva body spojíme následujícím způsobem:



Úkolem v podstatě je určit polohu bodu X.

Tohoto principu nyní využijeme dvakrát. Zobrazme bod S podle osy o_1 (alej), dostáváme bod S'. Dále zobrazme bod D podle osy O2 (řeka) na bod D'. Body, které hledáme na těchto osách si označme M a N. Nevíme, kde bod M leží, ale víme, že body M, N a S' musí ležet na jedné přímce. To samé musí platit o bodech D', M, N. Z toho plyne, že oba body M i N musí ležet na přímce $D'S'$.

Hledanou nejkratší cestou je lomená čára $SMND$.