Řešení 3. série

Řešení J-I-3-1

Rok má 365 dní, 12 měsíců. Pro názornost si zde vypíšeme vždy první den v měsíci a jeho pořadové číslo v roce.

1.1.	1.den		1.7.	182.den
1.2.	32.den		1.8.	213.den
1.3.	60.den		1.9.	244.den
1.4.	91.den		1.10.	274.den
1.5.	121.den		1.11.	305.den
1.6.	152.den		1.12.	335.den

Hned na začátku můžeme vyškrtnout prosinec. Žádný den ve spojení s číslem měsíce nesplňuje naši podmínku. Dále si pomůžeme rokem 2201. Díky tomu můžeme vyřadit měsíce jako je leden, únor, březen, duben, květen, červen. Neboť vezmeme-li např. 30.6. a vynásobíme-li datum, dostaneme číslo 180, což by znamenalo, že se Kos ještě nenarodil. Postupně pak vezmeme každý ze zbývajících měsíců: Listopad - každé takto vytvořené číslo by muselo končit na číslo 11, v úvahu přichází pouze číslo 311, ale je-li 1.11. den 305. v roce, tak potom 311. den je 7.11. a ne 3.11. Říjen - pořadové číslo dne musí končit na 10, srovnáme-li uvažovaná čísla s pořadovým číslem 1.10., zjistíme, že žádné takové nepřichází v úvahu (vezmu-li např. 2.10., získám číslo 210, což je menší pořadové číslo, než u 1.10., a naopak u 3.10. získáme vysoké pořadové číslo. Zbývá nám tedy už jen červenec, srpen a září. Ověříme tedy nalezená pořadová čísla. V červenci jsou to data:

$$18.7., 19.7., 20.7.,$$

v srpnu:

$$21.8., 22.8., 23.8.,$$

v září:

$$24.9., 25.9., 26.9.$$

Všechny podmínky splňuje až datum 26.9., což je zároveň 269. den v roce.

$$26 \cdot 9 = 234,$$

$$2201 - 234 = 1967.$$

Kos se tedy narodil 26.9.1967.

Řešení J-I-3-2

Honza vzal z 1. truhlice 1 dukát, z 2. truhlice 2 dukáty, …, z 8. truhlice 8 dukátů a zvážil je. Kdyby byly ve všech truhlicích pravé dukáty, vážily by ty odebrané

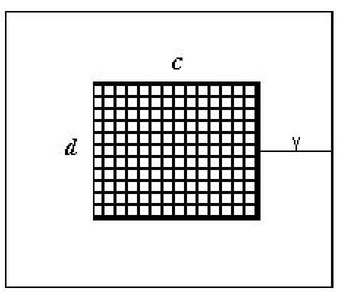
$$10\text{g} + 20\text{g} + \ldots + 80\text{g} = 360\text{g}.$$

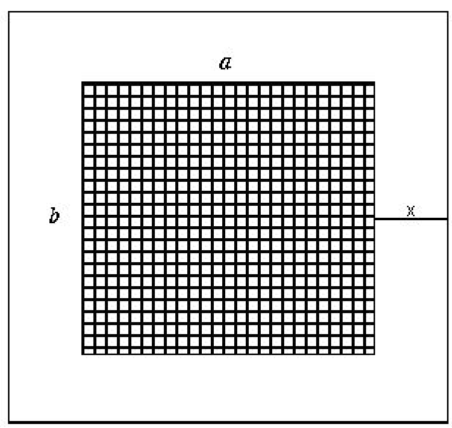
V jedné jsou ale falešné dukáty, které váží právě o 1g méně než ty pravé. Tedy kolik gramů chybí Honzovi do 360g, v tolikáté truhlici jsou falešné mince.

Řešení J-I-3-3

Předpokládejme, že jsou oba stoly obdélníkové a označme si délky stran většího a, b a délky stran menšího c, d. Jejich obvody pak zapíšeme

$$2(a + b) = 8 \text{ m} \qquad 2(c + d) = 4 \text{ m}.$$





Když si navíc označíme délku mezery mezi lavicí a větším stolem x a lavicí a menším stolem y, jak je to na obrázku, můžeme vypočítat jejich velikosti ze známé délky lavic.

$$2[(a + 2x) + (b + 2x)] = 10 \text{ m} \qquad 2[(c + 2y) + (d + 2y)] = 6 \text{ m},$$

$$2(a + b) + 8x = 10 \text{ m} \qquad 2(c + d) + 8y = 6 \text{ m}.$$

Dosazením hodnot obvodu obou stolů dostaneme

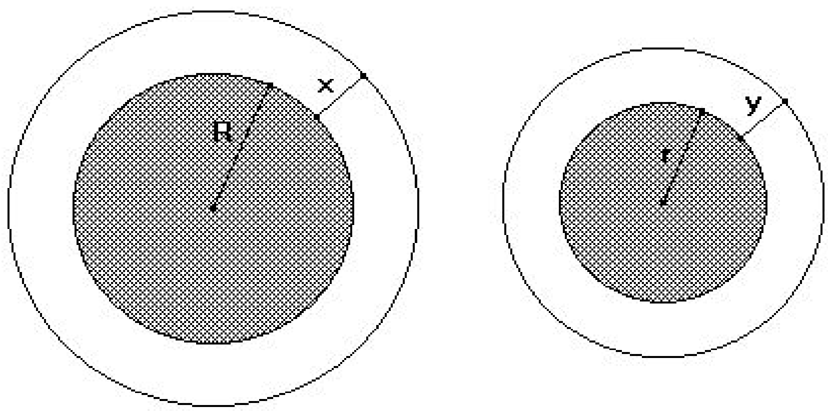
$$8x = 2 \text{ m} \qquad 8y = 2 \text{ m},$$

tedy

$$x = y.$$

Znamená to tedy, že nezáleží na velikosti stolu, u obou by měli stejné místo na nohy.

Oba stoly mohly být ale kruhového tvaru. Budeme postupovat podobně jako u obdélníkových stolů. Poloměr desky většího stolu označíme R a poloměr menšího r. (viz obr.)



Pro obvody desek stolů máme

$$2\pi R = 8 \text{ m} \qquad 2\pi r = 4 \text{ m}.$$

Délky lavic pak jsou

$$2\pi(R + x) = 10 \text{ m} \qquad 2\pi(r + y) = 6 \text{ m},$$

$$2\pi R + 2\pi x = 10 \text{ m} \qquad 2\pi r + 2\pi y = 6 \text{ m}.$$

Dosazením dostaneme podobně jako v předchozím

$$2\pi x = 2 \text{ m} \qquad 2\pi y = 2 \text{ m},$$

tedy

$$x = y.$$

Tedy i když budou oba stoly kulaté, nezáleží na jejich velikosti. Místo mezi lavicí a stolem je v obou případech stejné.

Mohlo se ale stát, že jeden stůl byl obdélníkový a druhý kruhový. Uvažujme tu možnost, že stůl s větším obvodem je obdélníkový a stůl s menším obvodem je kruhový. Pokud by to bylo naopak, naše úvaha se vůbec nezmění. Pro mezery x (obdélník) a y (kruh) dostaneme

$$x = \frac{1}{4}\ \mathrm{m} \qquad y = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{m},$$

tedy

$$y > x.$$

Znamená to tedy, že pokud byl jeden stůl kruhový a druhý obdélníkový (a nezáleží na tom, jestli má větší poloměr nebo menší), měli si sednout ke kruhovému, protože ten má větší mezeru pro nohy.

Řešení J-I-3-4

Tato úloha má tři možné postupy řešení. Nejprve vypočítáme obsahy kruhů. Označme

S obsah velkého kruhu

S_1 obsah malého kruhu

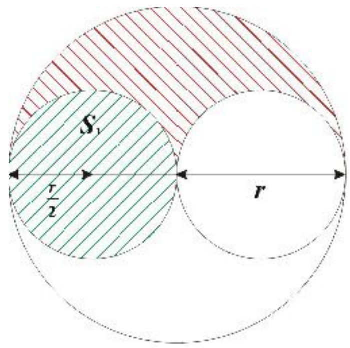
$$S = \pi r^2,$$

$$S_1 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{4}.$$

Obsah malého kruhu tedy tvoří čtvrtinu velkého. Tyto kruhy jsou dva, tedy

$$2S_1 = 2\pi \frac{r^2}{4} = \pi \frac{r^2}{2}$$

a zabírají polovinu obsahu velkého. Na zbývající nepravidelné části nám tedy zbývá taktéž jedna polovina a jelikož jsou oba díly shodné, každý z nich zaujímá čtvrtinu velkého kruhu. Placku je tedy možné rozdělit takto:



Můžeme však placku rozdělit rovným řezem. Opět si musíme vypočítat, jakou část kruhu tvoří kruhy malé a nepravidelné části.

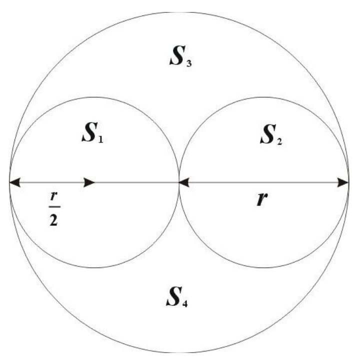
S obsah velkého kruhu

S_1 obsah malého kruhu

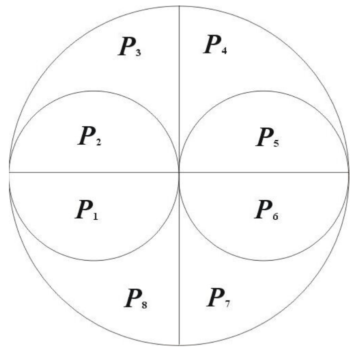
$$S = \pi r^2,$$
$$S_1 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{4}.$$

I zde tedy platí:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$



Dále každou z částí $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ rozdělíme na polovinu. Pro nás bude výhodné sestrojit společnou přímku obou malých kružnic a kolmici v bodě jejich dotyku. Jestliže dříve každá část zaujímala $\frac{1}{4}$ kruhu, tak nyní každá část tvoří $\frac{1}{8}$ obsahu velkého kruhu, které si označíme P_1 až P_8.



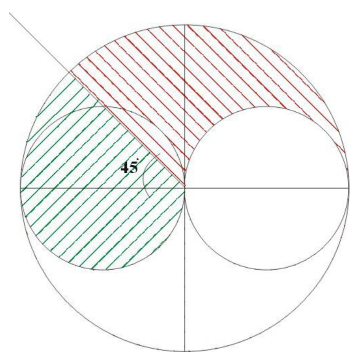
Dále platí:

$$P_2 + P_3 = P_4 + P_5 = P_6 + P_7 = P_8 + P_1 = \frac{1}{4},$$

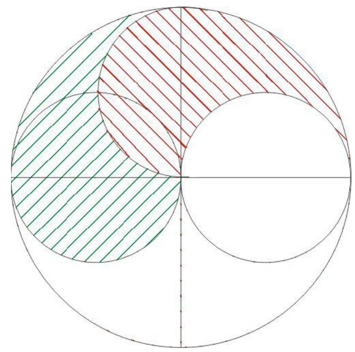
ale také

$$P_1 + P_4 = P_2 + P_3 = \frac{1}{4}.$$

Proto můžeme část kruhu, který je tvořen součtem obsahů P_2 a P_3 rozdělit rovným řezem na dvě shodné části, který nám rozdělí i placku:



S odvoláním na předchozí výpočty můžeme placku rozdělit na dva tvarově shodné obrazce.



Řešení J-I-3-5

Víme, že hunk je o 10% větší než knaf. To znamená, že 1 hunk je stejně velký jako 1,1 knafu. Vynásobením 10 dostaneme, že 10 hunků je 11 knafů. Nyní vypočítáme, kolik hunků je ve 20 knafech:

$$\frac{20}{11} \cdot 10 = 18 + \frac{2}{11}.$$

Toto číslo není celé a my nemůžeme hunky rozřezávat na části, dostáváme tady, že do 20 knafů se vejde 18 hunků.

Ze zadání dále víme, že do 1 plauce se vejde právě 20 knafů a zároveň víme, že hemput je menší než plauc. Dostáváme tedy, že do hemputu se vejde méně než 20 knafů a tedy méně než 18 hunků.

Protože 11 knafů je 10 hunků, dostáváme, že 18 hunků je 8 hunků + 11 knafů.

Jelikož víme, že obsah hemputů je převážně červený, je v jednom hemputu alespoň jeden hunk, ale více knafů. V jednom hemputu je tedy nejvýše 8 zelených hunků.