KoS Junior
Řešení 4. série

Řešení J-I-4-1

Nejprve vypočítáme obsah celého okénka, tedy trojúhelníka ABC.

$$S_O = \frac{(a \cdot b)}{2},$$

$$S_O = 2\text{dm}^2.$$

Pro obsah záclonky musíme určit obsahy kruhových výsečí při vrcholech trojúhelníka $\widehat{AS_1}$, $\widehat{BS_2}$ a $\widehat{CS_3}$. Pokud bychom jednotlivé výseče poskládali dohromady, tak že vrcholy A, B, C splynou, dostaneme právě polovinu kruhu o poloměru $r = 1\text{dm}$. To je zřejmé, neboť součet úhlů u jednotlivých vrcholů trojúhelníka je vždy $180°$. Proto

$$S_Z = \widehat{AS_1} + \widehat{BS_2} + \widehat{CS_3} = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

$$S_Z = \frac{\pi}{2}\text{dm}^2.$$

Obsah obrazce M snadno určíme jako

$$S_M = S_O - S_Z,$$

$$S_M = (2 - \frac{\pi}{2})\text{dm}^2 \doteq 0,43\text{dm}^2.$$

Teď můžeme lehce vyjádřit, kolik procent z obsahu okénka ABC představuje volné místo M.

$$\begin{array}{lcr} 100\% & \dots & 2\text{dm}^2 \\ \text{x}\% & \dots & 0,43\text{dm}^2 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{0,43\text{dm}^2}{2\text{dm}^2} \cdot 100\% = 21,5\%.$$

Volné místo M tedy představuje 22% Bářina okénka.

Řešení J-I-4-2

Máme-li zjistit kolik stránek je tvořeno z 5 393 číslic, máme vlastně zjistit, kolik vytvoříme přirozených čísel, začneme-li od 1. Budeme postupně počítat, kolik je jednociferných, dvouciferných, trojciferných atd. čísel, dokud nespotřebujeme všech 5 393 číslic.

interval	počet čísel	počet číslic
1 - 9	9	$1 \cdot 9 = 9$
10 - 99	90	$2 \cdot 90 = 180$
100 - 999	900	$3 \cdot 900 = 2700$
1000 - 9999	9000	$4 \cdot 9000 = 36000$

36 000 číslic je daleko více než máme k dispozici. Proto je počet stránek Velké Kosí Encyklopedie jistě menší než 10 000, ale je jistě větší než 999.

Do stránky 999 potřebujeme 9 + 180 + 2 700 = 2 889 číslic. Zbývá nám jich tedy 5 393 - 2 889 = 2 504. Ty se mají rozdělit mezi čtyřciferná čísla, proto čtyřciferná čísla tvoří $\frac{2\ 504}{4} = 626$ stránek. Čtyřciferné stránky začínají číslem 1 000, musí tedy končit číslem 1 625.

Zjistili jsme, že Velká Kosí Encyklopedie má 1 625 stránek.

Řešení J-I-4-3

Hodinové ručičky se za 12 hodin potkají jedenáctkrát, za 24 hodin tedy 22krát. Pravý úhel vytvoří vždy přibližně čtvrt hodiny před a čtvrt hodiny po té, co se potkají a tudíž celkový počet pravých úhlů je dvojnásobný počtu jejich potkání.

$$22 \cdot 2 = 44$$

Ručičky vytvoří pravý úhel 44krát za den.

Řešení J-I-4-4

Sestavme si přehlednou tabulku všech údajů, které budeme potřebovat.

Bára	...	8 kroků
Matěj	...	24 kroků
1 krok	...	0,5 m
délka sáněk (v krocích)	...	d
rychlost sáněk	...	v
čas (projití kolem stojících sáněk)	...	t

Pro délku sáněk si můžeme sestavit dvě rovnice. Budeme vycházet ze vzorce pro dráhu rovnoměrného přímočarého pohybu.

Matěj jde delší dráhu než je samotná délka sáněk právě o tolik, o kolik sáňky popojedou za čas t.

$$d + vt = 24$$

Bára ujde naopak o tolik kratší dráhu.

$$d - vt = 8$$

Sečtením obou rovnic se výraz vt odečte a dostaneme jednoduchou rovnici

$$2d = 32,$$

$$d = 8 \text{ kroků.}$$

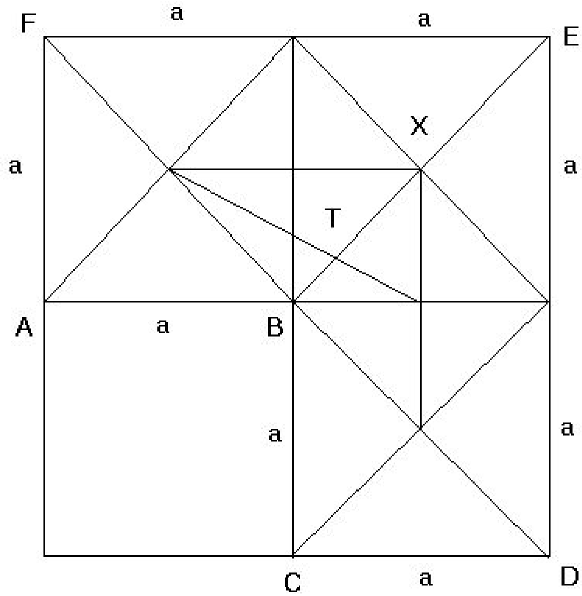
Vláček ze sáněk tedy měří 16 kroků, což je 8 m.

Řešení J-I-4-5

Úkolem bylo nalézt těžiště zadané plochy. Těžištěm nazýváme bod, který získáme jako průsečík tzv. těžnic. Řešení tedy bylo jednoznačně určeno právě tímto jedním bodem. Postup pro nalezení těžiště v trojúhelníku, čtverci či obdélníku jste si jistě ukazovali v hodinách matematiky. Výhodou těchto ploch je jejich symetričnost. Těžnice nám vždy plochu rozdělí na dva shodné, osově souměrné (osou je zde právě těžnice) obrazce. V případě, že máme nalézt těžiště plochy u níž by se nám nepodařilo nalézt alespoň dvě těžnice (a tím získat jejich průsečík = těžiště), postupujeme následovně:

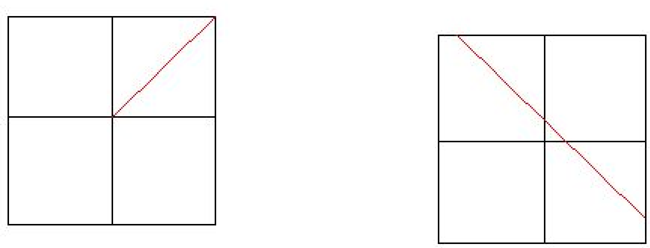
Pokusíme se plochu rozdělit na shodné (pro nás již řešitelné) obrazce, které se nebudou překrývat, najdeme jejich těžiště a propojením těchto pomocných těžišť získáme opět plochu (budou-li dvě, tak jen přímku), jejíž těžiště je již těžištěm celé plochy. V případě koláče podmínky splňují pouze tři shodné čtverce. V každém čtverci lehce najdeme těžiště. Vzniklá těžiště spojíme a získáme trojúhelník, jehož těžiště je již těžištěm celého koláče. (viz obr.1)

Chcete-li si ověřit, zda vaše řešení je správné, zkuste si ve svém obrázku nalézt těžiště popsaným postupem. Toto ověření je však pouze orientační, protože rýsování nemusí být vždy přesné. Jistější postup je výpočet. K výpočtu opět využijeme obr.1. Zkuste si sami ověřit, zda váš bod T splňuje podmínku, že je v jedné šestině úsečky BE.



obr. 1

Pozn. Ve vašich řešeních se objevila i myšlenka využít při hledání těžiště vlastnosti obsahu plochy. Je pravda, že podaří-li se nám rozdělit plochu na 2x2 části, které by měly stejný obsah, tak bod, který vznikne jako průsečík hranic těchto rozdělení je těžiště. I zde však platí, že obě plochy musí být shodné, osově souměrné. Shodný obsah v případě těžiště bohužel nestačí.(viz obr.2)



obr. 2