



Řešení 5. série kategorie Junior

Řešení J-I-5-1

Poslali jste nám různá řešení a každé, které splňovalo všechny zadané podmínky bylo správné. Jedním z nich je např. toto:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & -1 & +2 & +3 & = & 4 \\
 & & & (1 & +2) & \cdot 3 & -4 & = & 5 \\
 & & 1 & +2 & \cdot 3 & +4 & -5 & = & 6 \\
 & (1 & \cdot 2 & -3) & \cdot 4 & +5 & +6 & = & 7 \\
 & -1 & -2 & -3 & -4 & +5 & +6 & +7 & = & 8 \\
 1 & +2 & -3 & +(4 & -5) & \cdot (6 & -7) & +8 & = & 9 \\
 (1 & +2) & \cdot 3 & -4 & -5 & +6 & -7 & -8 & +9 & = & 0
 \end{array}$$

Řešení J-I-5-2

Jde o to zjistit, který z nich dosud překonal delší cestu (byl by to v tom případě cyklista). Označme si délku trasy, kterou ujela doposud Bára, jako x . Délku trasy, kterou překonal Matěj, jako y . Délku celé cesty na zříceninu si označme s .

Pak tedy:

Bára:

$$s = \frac{1}{2}x + 3 \cdot \frac{1}{2}x = 2x,$$

tj. $x = \frac{1}{2}s = \frac{4}{8}s$. Bára je v polovině cesty.

Matěj:

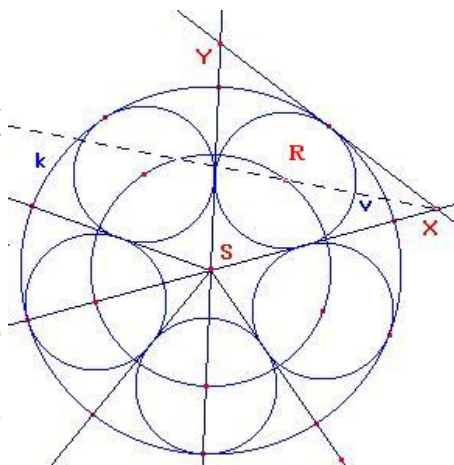
$$s = 2y + \frac{2}{3}y = \frac{8}{3}y,$$

tj. $y = \frac{3}{8}s$. Matěj je ve $\frac{3}{8}$ cesty.

Jelikož $\frac{4}{8}s > \frac{3}{8}s$, je $x > y$. Na kole jela tedy Bára.

Řešení J-I-5-3

Většina z vás začala dobře. Rozdělila si danou kružnici k na pět stejných výsečí s úhlem 72° . Tak jsme mohli zkonstruovat pravidelný pětiúhelník, který je kružnici k opsán (viz obr.) Tento pětiúhelník je tvořen pěti shodnými trojúhelníky, jedním z nich je $\triangle SXY$. Hledané kružnice bazénků jsou kružnice vepsané těmto trojúhelníkům. Pro $\triangle SXY$ je to kružnice v . Najdeme-li jednu tuto kružnici v , středy zbývajících leží na pomocné kružnici se středem S a poloměrem $|SR|$.



Řešení J-I-5-4

Označme si pro přehlednost střed kruhové části klíčové dírky S a vrcholy trojúhelníkové části X a Y . Ze zadání víme, že $\triangle XYS$ je rovnostranný a tedy velikost úhlu XSY je 60° . Strana AB tedy představuje stranu pravidelného šestiúhelníku, který je do kružnice vepsán. Poloměr kruhové části je proto roven velikosti úsečky AB , tj. 3,0 cm.

K tomu, abychom mohli spočítat obsah klíčové dírky, potřebujeme znát délku strany XY trojúhelníku XYS . Tu vypočítáme z celkového obvodu. Označme si poloměr kružnice $|SA| = r$, stranu $|XY| = x$. Velikosti úseček XA , resp. YB jsou pak $x - r$.

Pro obvod kruhové části platí:

$$O_k = \frac{5}{6} \cdot 2\pi r$$

Pro obvod trojúhelníkové části platí:

$$O_t = x + (x - r) + (x - r) = 3x - 2r$$

Podle zadání je $O_k + O_t = O \doteq 27,7$ cm. Odtud

$$27,7 \doteq \frac{5}{6} \cdot 2\pi r + 3x - 2 \cdot r,$$

$$x \doteq 6,0 \text{ cm.}$$

Pro obsah trojúhelníku potřebujeme znát také jeho výšku. Tu můžeme zjistit pomocí Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$v \doteq 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Nyní už lehce vypočítáme obsah průřezu klíčové dírky:

$$S = \frac{5}{6}\pi r^2 + \frac{1}{2}xv,$$

$$S \doteq 39,1 \text{ cm}^2.$$

Řešení J-I-5-5

1. způsob řešení

Budeme předpokládat, že Kos může dlaždičky přesně řezat a zbylé oddělené části využít k pokrytí částí podlahy, kam se již celé dlaždičky nevejdou. To znamená, že nezáleží na tom, v jaké poloze je dlaždička na podlaze položena. Vždy bude potřeba stejný počet dlaždiček.

Spočítáme tedy obsah podlahy a obsah dlaždiček a zjistíme, kolik dlaždiček se na podlahu vejde.

$$S_{pod} = 3 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 18 \text{ m}^2,$$

$$S_{dla} = 0,2 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,04 \text{ m}^2.$$

Výpočtem

$$\frac{18 \text{ m}^2}{0,04 \text{ m}^2} = 450$$

zjistíme, že na pokrytí podlahy Kos potřebuje 450 dlaždic.

Dále víme, že 4 dlaždičky tvoří jedno balení. Proto spočítáme, že

$$450 : 4 = 112,5.$$

To znamená, že si Kos bude muset koupit 113 balení dlaždiček.

Jedno balení dlaždiček stojí 85 Kosích korun. Proto Kos zaplatí $113 \cdot 85$ Kosích korun, což je 9 605 Kosích korun.

2. způsob řešení

Předpokládejme, že Kos může dlaždičky řezat, ale zbylé oddělené části již nemůže využít k pokrytí částí podlahy, kam se již celé dlaždičky nevejdou. Tentokrát tedy bude zapotřebí více dlaždiček než v předchozím případě.

Nejdříve spočítáme, kolik dlaždiček lze položit na podlahu na délku pokojíčku, a potom kolik na šířku pokojíčku. K tomu potřebujeme znát délku úhlopříčky dlaždičky.

Snadno spočítáme, že délka úhlopříčky dlaždičky je

$$\sqrt{0,2} \text{ m} + \sqrt{0,2} \text{ m} = 0,2\sqrt{2} \text{ m}.$$

Jako první do rohu pokoje umístíme jen čtvrt dlaždičky a tak nám z délky pokoje zbyde $6 \text{ m} - 0,1\sqrt{2} \text{ m} \doteq 5,717 \text{ m}$ a z šířky pokoje $3 \text{ m} - 0,1\sqrt{2} \text{ m} \doteq 2,717 \text{ m}$.

To znamená, že na délku pokojíčku (do řady) lze na podlahu položit

$$5,717 \text{ m} : 0,2\sqrt{2} \text{ m} \doteq 20,7$$

dlaždiček a na šířku pokojíčku (do sloupce)

$$2,717 \text{ m} : 0,2\sqrt{2} \text{ m} \doteq 10,1$$

dlaždiček. Tato čísla zaokrouhlíme nahoru, protože používáme jen celé dlaždičky, připočteme k nim tu jednu dlaždičku, kterou jsme umístili do rohu. Tedy na pokrytí jedné řady je třeba 22 dlaždiček a na pokrytí sloupce 12 dlaždiček.

Dále musíme dát pozor na to, že v každé řadě je sice stejný počet dlaždiček (sudé řady jsou o čtvrt dlaždičky posunuté a tak z 22. dlaždičky použijeme jen kousek), ale řad je 12 (lichých) + 11 (sudých).

Na celou podlahu je tedy potřeba

$$22 \cdot (12 + 11) = 506$$

dlaždiček.

Protože $506 : 4 = 126,5$, musí Kos koupit 127 balení dlaždiček a zaplatí za ně $127 \cdot 85$ Kč, to je 10 795 Kč.

Přejeme Ti krásné prázdniny a u dalšího ročníku korespondenčního semináře KoS Severák na shledanou!