Řešení 2. série J-II-2

Řešení J-II-2-1

Při rozdělení 7000 zlatých mincí mezi otce, syna a dceru se musí zachovat poměry stanovené v závěti. Označme si počet mincí, které dostane otec o, které dostane syn s a které dostane dcera d. Potom

1. Při narození syna má syn dostat $\frac{2}{3}$ a otec $\frac{1}{3}$, poměr je tedy $o : s = 1 : 2$.
2. Při narození dcery má dcera dostat $\frac{1}{3}$ a otec $\frac{2}{3}$, $d : o = 1 : 2$.
3. Z výše uvedeného: $d : o : s = 1 : 2 : 4$.

Částku 7000 máme tedy rozdělit na $1 + 2 + 4 = 7$ stejných dílů tak, že dcera dostane 1 díl, otec 2 díly a syn 4 díly. Jeden díl je roven $7000 : 7 = 1000$ zlatých mincí. Proto bude celá částka rozdělena následujícím způsobem:

	dcera		otec		syn
poměr	1	:	2	:	4
počet zlatých mincí	1000		2000		4000

Kontrola: Po sečtení všech mincí, které dostane dcera, otec i syn, nám musí opět vyjít 7000 ($1000 + 2000 + 4000 = 7000$).

Řešení J-II-2-2

Správně hodiny bily naposledy v 10:00 hodin v pondělí, nejbližší chybné bití bude následovat v pondělí ve 12:00 hodin, mezitím v 11:00 hodin však bily správně. Nejbližší správné bití bude tedy následovat v pondělí v 11:00 hodin.

Řešení J-II-2-3

Do tabulky máme rozmístit čísla 1, 2, ..., 9 tak, aby součty v řádcích, sloupcích i v hlavních diagonálách byly vždy 15.

Označme si chybějící čísla postupně A, B, C, D a E.

2	Z	A
B	5	C
D	E	8

Víme, že číslo $A + C + 8$ je liché L, proto právě jedno z čísel A a C je sudé S ($L + L = S,\ L + S = L,\ S + S = S$). Podobně právě jedno z čísel C, D a právě jedno z čísel D a E je sudé. Nám ale zbývají jen sudá čísla 4 a 6. Proto musí být číslo D sudé.

Dosaďme $D = 4$, potom $E = 15 - (8 + 4) = 3$; $B = 15 - (2 + 4) = 9$; $C = 15 - (9 + 5) = 1$; $A = 15 - (8 + 1) = 6$ a $Z = 15 - (2 + 6) = 7$.

Podobně pro $D = 6$ dostaneme $A = 4$, $B = 7$, $C = 3$, $E = 1$ a $Z = 9$.

V obou případech je splněna i podmínka pro diagonály, proto řešením jsou právě dvě rozmístění.

2	**7**	6
9	5	1
4	3	8

2	**9**	4
7	5	3
6	1	8

Ke Zlovousovi vedly tedy dvě cesty a kamarádi si mohli vybrat buď cestu označenou číslem 7 nebo číslem 9.

Řešení J-II-2-4

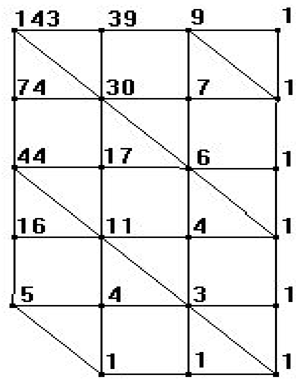
Všechny tři vlastnosti mají sochy s takovým pořadovým číslem, že je zároveň násobkem 3, 7 i 15. Nejmenším společným násobkem je $n(3,\ 7,\ 15) = 105$. Každá stopátá má všechny tři vlastnosti zároveň a je jich tedy $945 : 105 = 9$.

Nyní zjistíme, kolik soch nemá ani jednu z uvedených vlastností. Budeme postupně (pomyslně) odebírat ty, které nějakou z vlastností mají. Odebereme-li všechny pozlacené sochy, odebereme i všechny s korunou. Takových je $945 : 3 = 315$ a tak bez pozlacení i bez koruny je $945 - 315 = 630$ soch. Stejně odebereme i sochy se žezlem $945 : 7 = 135$, proto $630 - 135 = 495$. Nezapomeňme ale, že některé sochy jsou pozlacené a mají zároveň žezlo. Takových je $945 : 21 = 45$ a ty jsme odebrali dvakrát. Musíme je proto vrátit. Soch bez ozdoby je tedy $495 + 45 = 540$.

Řešení J-II-2-5

Vzhledem k tomu, že pavouk se pohybuje jen ve třech povolených směrech, budeme uvažovat jen část sítě, jak je naznačeno na obrázku. Neboť kdyby se pavouk dostal do části nad Kosa nebo za Kosa vlevo, nemohl by se již k němu vrátit.

Počet způsobů, jak se dostat do nějakého uzlu, si budeme zapisovat k daným uzlům do obrázku. Snadno si teď uvědomíme, že toto číslo se vždy rovná součtu čísel u (nejbližších) sousedních uzlů, z nichž lze do daného uzlu dojít. Například do uzlu s číslem tři je možné dostat se ze tří předcházejících uzlů (1, 1, 1), do kterých jsme se mohli dostat jediným způsobem. Takovou úvahu můžeme opakovat v libovolném uzlovém bodě sítě. Uvažujme, že se do uzlu U může křižák dostat ze dvou resp. tří uzlů A, B, C a do těchto uzlů se mohl z počátku dostat k, l a m způsoby. Jelikož se z uzlů A, B, C může do uzlu U dostat vždy jediným způsobem, z počátku se do uzlu U může dostat $k + l + m$ způsoby. Řešení je pak zachyceno na obrázku.



Pavouk může přejít ke Kosovi 143 různými způsoby.