Řešení 4. série II. ročníku kategorie JUNIOR

Řežení J-II-4-1

Nejdříve si uvědomme, že nemůže vyjet jen jeden Drodruár, protože na druhém břehu by zůstali zločinci nehlídáni. Necháme tedy jet Drodruáry dva. Vžechny cesty si zapížme do tabulky, ať máme dobrý přehled o jejich průběhu a na někoho nezapomeneme. Písmeno D představuje Drodruáry a Z zločince.

1. břeh	cesta tam	2. břeh	cesta zpět
3D a 27Z	2D a 7Z	1D a 7Z	1D
2D a 20Z	2D a 7Z	2D a 14Z	1D
2D a 14Z	1D a 6Z	2D a 20Z	1D
1D a 7Z	2D a 7Z	3D a 27Z	1D
	2D a 7Z	5D a 34Z	

Toto je jen jeden ze způsobů, jak to provést. Možností je několik.

Řežení J-II-4-2

Předpokládejme, že Hádalník měl připravenou potravu na t týdnů, tj. měl $31 \cdot 10 \cdot t$ pečínek. Když mu ale draci ubývají, pak stejný počet pečínek vydrží na $2t$ týdnů. První týden 31 draků spotřebuje $31 \cdot 10$ pečínek. Další týden má Hádalník jen 30 draků, tj. spotřebují $30 \cdot 10$ pečínek. Další týden krmí jen 29 draků, kteří potřebují $29 \cdot 10$ pečínek, atd. Celkem ve $2t$ týdnech sežerou

$$10[31 + (31-1) + (31-2) + \cdots + (31 - (2t-1))] =$$

$$= 10[2t \cdot 31 + (1 + 2 + \cdots + (2t-1))]$$

pečínek.

Součet $1 + 2 + \cdots + (2t-1)$ provedeme pomocí následující úvahy (mnozí ji již znáte, protože se v KoSovi už objevila). Máme-li sečíst např. vžechna přirozená čísla do 6, tj. $1+2+\cdots+6$, můžeme si čísla „přeskupit“ a sčítat $1+6$, $\;2+5$ a $3+4$. Vždy je součet 7, které dostaneme $3 = \frac{6}{2}$. Úvahu zopakuje i pro součet přirozených čísel do $(2t-1)$.

$$1 + 2 + \cdots + (2t-1) = [1 + (2t-1)] \cdot \frac{2t-1}{2} = t(2t-1)$$

Tedy počet pečínek, který Hádalníkovi vydrží na $2t$ týdnů, je

$$10[31 \cdot 2t - t(2t-1)].$$

Jelikož je počet pečínek pořád stejný, můžeme sestavit rovnici

$$31 \cdot 10 \cdot t = 10 \cdot t \cdot [2 \cdot 31 - (2t-1)].$$

Jejím řežením je $t = 16$, tedy Hádalník měl původně potravu na 16 týdnů. Když mu ale každou neděli ubyde jeden drak, vydrží mu pečínky na 32 týdnů.

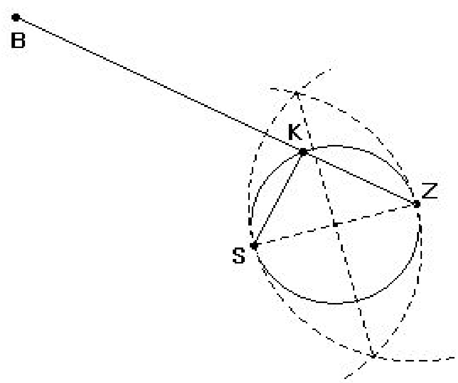
Řežení J-II-4-3

Při řežení budeme postupovat od konce zadání úlohy. Označíme si písmeny m, d a b postupně počet koblih v míse, než si je začali brát Muclík, Duclík a Buclík. V míse zůstalo 11 koblih, což je podle zadání $\frac{2}{3}m + 1$ kobliha, tedy $\frac{3}{3}m$ je 15 koblih. Když přižel k míse Muclík, bylo v míse 15 koblih. To jsou opět $\frac{2}{3}d + 1$, a tedy $\frac{3}{3}d$ je 21 koblih. Když přižel k míse Duclík, bylo v ní 21 koblih. To je opět $\frac{2}{3}b + 1$ a $\frac{3}{3}b$ je 30 koblih, což je i výsledek naží úlohy. Pro kontrolu si můžeme spočítat, kolik snědl každý. Buclík snědl $\frac{1}{3}b - 1$ z 30, což je 9 koblih, Duclík $\frac{1}{3}d - 1$ z 21, což je 6 koblih a Muclík snědl $\frac{1}{3}m - 1$ z 15, což jsou 4 koblihy a zbylo nám 11 koblih. Celkem nám součet dává $9 + 6 + 4 + 11 = 30$. Tím je úloha vyřežena.

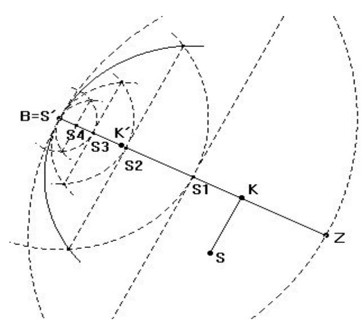
Řežení J-II-4-4

Vžichni dobře víme, že nejkratží cesta od studny k cestě mezi oběma hrady, bude na tuto cestu kolmá. To si můžeme rozmyslet třeba pomocí trojúhelníkové nerovnosti. Tedy jde o to, jak kolmici spusti, když máme k dispozici jen kružítko a pravítko bez měřítka. (Pravítko s ryskou samozřejmě také namáme:)

Můžeme využít např. Thaletovy kružnice. Spojme bod S (studna) a bod Z (Zlovusův hrad) a sestrojme střed úsečky SZ (viz obr.). To asi vžichni umíme. Teď už můžeme sestrojit Thaletovu kružnici nad průměrem SZ. Průsečík této kružnice s úsečkou ZH (cesta mezi hrady), bod K je tak hledaná křižovatka.



Jak teď odhadnout délku cesty? Jediné měřítko, které máme je informace, že úsečka ZH má délku 4 km. Můžeme si tedy vytvořit pomocí ní měřítko, půlením ho budeme zjemňovat.



Na úsečku ZH můžeme také přenést délku úsečky SK a tak odhadnout její velikost. V nažem případě je to přibližně 1 km. Určit vzdálenost obou hradů od křižovatky je už také lehké. V nažem případě je to přibližně od Zlovusova hradu ke křižovatce 1300 m a od Hradu bratrů 3700 m. Cenu cesty vypočítáme už lehce. Cesta bude stát přibližně 5O zlatých.

Řežení J-II-4-5

Nejmenží společný násobek čísel 4, 5 a 6 je číslo 60. Přičteme číslo 2, protože nám 2 zámky zbyly. Další násobky čísel 4,5 a 6 jsou 120, 180 a 240, další hledat nemusíme, protože zámků je méně než 300. K nim přičítáme vždy 2 zbylé zámky. Dostaneme tak možné počty zámků 62, 122, 182 a 242. Jediné číslo z této řady dělitelné 11 je číslo 242. Zámků je tedy 242.