Řešení 5. série II. ročníku kategorie JUNIOR

Řešení J-II-5-1

Kůň nikdy nemůže popsaným způsobem přeskákat šachovnici. Bude-li totiž kůň stát na černém políčku, vždy doskočí na políčko bílé. Analogicky pro, bude-li stát na poli bílém. Barva polí, na které kůň doskočí se tedy budou střídat stále dokola – černá, bílá, černá, bílá, černá, bílá, atd.

Jestliže se takto barvy střídají, musí být na šachovnici stejný počet černých a bílých polí, aby je kůň mohl projet všechna a vrátit se na pole původní. Ovšem na šachovnici o rozměrech nxm polích, kde m, n jsou různá lichá čísla, je vždy počet černých a bílých políček různý, a to o jedno pole. Kůň tedy nemůže projít každé pole právě jednou a vrátit se na své původní místo.

Stejný případ nastává i na šachovnici o rozměrech $3x3$, protože vždy bude počet políček o jedno nižší než počet políček druhé barvy.

Rozmyslete si, jestli je možné na takové šachovnici najít pole, odkud by mohl kůň proskákat všechna pole, když nepožadujeme, že se musí vrátit na původní místo.

Řešení J-II-5-2

Hledané číslo nemá být dělitelné právě dvěma po sobě jdoucími čísly z množiny $2, 3, \ldots,\ 13$. Hledejme nejprve tato dvě čísla. Je zřejmé, že číslo 2 to být nemůže, protože to dělí čísla 4, 6, 8, 10 a 12, a tak by dělilo i hledané číslo. Ze stejných důvodů vyloučíme čísla 3, 4, 5 a 6. Musíme vyloučit i jejich společné násobky, tedy čísla 10 a 12. To proto, že pokud hledané číslo dělí čísla 3 a 4, pak ho dělí i číslo $3 \cdot 4$, stejně pro 2 a 5. Také můžeme vyloučit 11 a 13, protože to mají být dvě po sobě jdoucí čísla a 10 a 12 jsme již vyloučili. Tedy zbývají čísla 7, 8 a 9.

Uvažujeme nejprve čísla 7 a 8. Jelikož hledáme nejmenší takové číslo, stačí najít nejmenší společný násobek čísel $2, 3, \ldots,\ 6,\ 9, \ldots,\ 13$, což je 25 740.

Pro čísla 8 a 9 hledáme nejmenší společný násobek čísel $2, 3, \ldots,\ 7,\ 10, \ldots,\ 13$. Ten je roven 60 060. Hledaným číslem je tedy 25 740.

Řešení J-II-5-3

Řešení si zjednodušíme zápisem do tabulek o $3x3$ polích. Rozhodněme nejprve, jak budou rozmístěny barvy domků, můžeme si je očíslovat. Potom jedno z možných rozmístění vypadá takto:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Nyní musíme k příslušným barvám – číslům přiřadit jednotlivé rodiny, které budou představovat písmena. Začneme např. od jedniček, ostatní kombinace číslo – písmeno pak už budou vynucené.

A	B	C
C	A	B
B	C	A

Řešení je pochopitelně mnohem více. Jiné bychom dostali třeba tak, že bychom začali písmena přiřazovat k trojkám. (Nebo kdybychom přiřadili písmena k jedničkám jinak.)

B	A	C
C	B	B
A	C	B

Výsledek získáme tak, že k číslům, resp. písmenům, jednoznačně přiřadíme barvy, resp. rodiny.

Řešení J-II-5-4

Pro to, abychom nalezli součet všech takových čísel, nemusíme nutně všechna tato čísla vypisovat. Stačí si uvědomit, kolikrát se například objeví číslice 1 na místě tisíců. Zřejmě právě šestkrát, protože pak na místo stovek můžeme dát kteroukoli ze tří zbývajících, na místo desítek pak kteroukoli ze dvou zbývajících a na místo jednotek nám tak zbyde jediná číslice. Celkem tedy 6 možností. Stejnou úvahu můžeme použít i pro číslici 3, 5 a 7. A pochopitelně, že stejně si můžeme počínat i tehdy, uvažujeme-li o pozici stovek, desítek nebo jednotek. Došli jsme tedy k závěru, že každá ze čtyř číslic se na každé ze čtyř pozic bude vyskytovat právě šestkrát. Odtud je součet všech takových čtyřciferných čísel

$$6 \cdot (7 + 5 + 3 + 1) \cdot (1\ 000 + 100 + 10 + 1) = 6 \cdot 16 \cdot 1\ 111 = 106\ 656.$$

Řešení J-II-5-5

Označme velikosti hran původního kvádru a, b a c, pak jeho objem byl $V = abc$. Jestliže se po 7 hodinách každá hrana zmenšila na polovinu, pak jeho objem je

$$V' = \frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2} = \frac{abc}{8}.$$

Tedy osmina původní velikosti. Kvádr se zmenšil o $\frac{7}{8}$ původního objemu za 7 hodin. Zde je nutné uvažovat dvě varianty toho, co znamená, že se kvádr bude zmenšovat stále stejným způsobem, tedy stejně rychle.

Buď bude jeho rychlost zmenšování konstantní, tedy $\frac{7}{8}V$ za 7 hodin, tj. $\frac{1}{8}V$ za 1 hodinu. Potom by zbývající $\frac{1}{8}$ původního kvádru zmizela právě za jednu hodinu.

Je ale také možné uvažovat, že se i v každých následujících 7 hodinách každá z hran kvádru vždy zmenší na polovinu. Potom po 14 hodinách by měl kvádr objem $\frac{abc}{64}$ původního objemu a po 21 hodinách $\frac{abc}{512}$ původního objemu a tak dále. Byl by tedy stále menší a menší, ale nikdy by zcela nezmizel (nebo můžeme říci, že by byla velikost nulová až po nekonečně dlouhém čase).