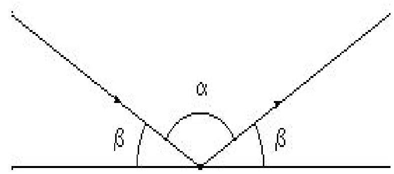
Řešení 1. série III. ročníku kategorie JUNIOR

Řešení J-III-1-1

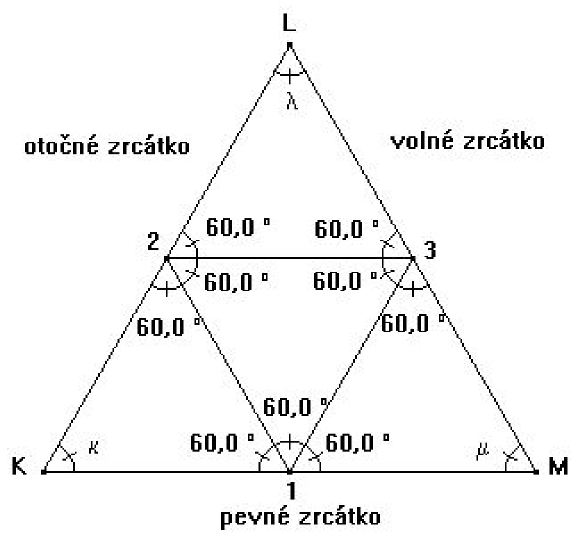
Při řešení této úlohy musíme vycházet z toho, co již Matěj s Bárou připomněli. Tedy, že úhel dopadu paprsku se rovná úhlu odrazu paprsku. Hlavně si ale musíme uvědomit, co vše víme o rovnostranném trojúhelníku, který nám má vyjít. Víme, že rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany stejně dlouhé. A také víme, že všechny tři vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku mají stejnou velikost a to 60°. Z toho plyne, že úhel, který svírá paprsek se zrcátkem při dopadu, i úhel, který svírá paprsek se zrcátkem při odrazu, má velikost 60°. Viz obrázek a výpočet.



Podle zadání je $\alpha = 60°$. Protože je $\alpha + 2\beta = 180°$ a proto $\beta = 60°$.

Není těžké si uvědomit, že naše úvaha nebyla nijak závislá na tom, o které zrcátko se paprsek odráží. Všechny úhly dopadu a odrazu paprsku musí být tedy 60°. Tedy paprsek musíme vypustit také pod tímto úhlem.

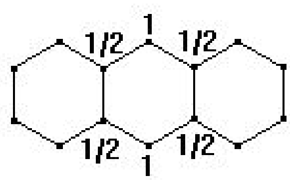
Naším dalším úkolem je nyní zjistit, jaký úhel bude svírat první zrcátko s druhým a jaký se třetím zrcátkem. Na obrázku jsme označili trojúhelník, který vznikne ze zrcátek, KLM a trojúhelník, který vznikne z paprsků, 123. Podívejme se, jaké velikosti vnitřních úhlů má trojúhelník K12. U vrcholů 1 a 2 jsou úhly o velikosti 60°, proto musí mít úhel u vrcholu K také velikost 60°. Stejně tak tomu bude i u vrcholů L a M.



Celá tato úloha vychází ze středních příček trojúhelníku. Střední příčka trojúhelníku je úsečka, jejímiž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníku. Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou a její délka je rovna polovině protější strany. Pokud je trojúhelník rovnostranný, tvoří jeho střední příčky také rovnostranný trojúhelník a zároveň dělí trojúhelník na čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky.

Řešení J-III-1-2

Nejprve si uvědomme, kolik je ve kterém kole šestiúhelníků. Při počítání uzlových bodů bude užitečné uvažovat jen lichá kola, abychom nepočítali některé body dvakrát. Ale i v jednom kole jsou některé body společné dvěma šestiúhelníkům. Vždy dvěma sousedním.



Budeme tedy počítat jen se čtyřmi body na jeden šestiúhelník. Výpočty pak můžeme uspořádat do tabulky:

	1. k.	2. k.	3. k.	4. k.	5. k.	6. k.	7. k.	celkem
počet šestiúhelníků	1	6	12	18	24	30	35	
počet uzlových bodů	6		48		96		144	294

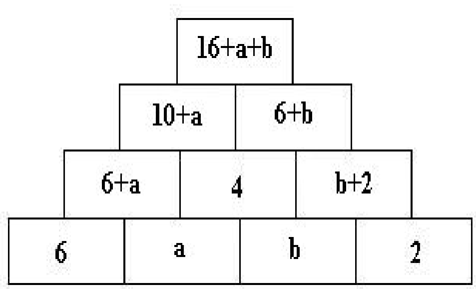
Celkový počet uzlů je 294 a to je i hledaný kód.

Řešení J-III-1-3

V nejspodnější řadě pyramidy mohou být libovolná závaží, ale taková, že součet jejich hmotností dává 4 hm. jednotky. Velikost hmotností závaží proto označíme a, b. Podle podmínek v zadání musí platit:

- a, b jsou reálná čísla,
- $a + b = 4$,
- $0 < a$, $b < 4$, protože se jedná o hmotnosti závaží, musíme vyloučit záporná čísla.

Do pyramidy doplníme hodnoty hmotnosti a dopočítáme zbývající patra.



Hmotnost konečného závaží m určíme součtem všech políček pyramidy.

$$m = [16+a+b]+[(10+a)+(6+b)]+[(6+a)+4+(b+2)]+[6+a+b+2] = 56+3(a+b).$$

Protože $a+b=4$, je

$$m = 56 + 3 \cdot 4 = 68.$$

Řešení úlohy nezávisí na volbě čísel $a,\ b$, ta musí jen splňovat výše uvedené podmínky. Matěj, Bára a Kos musí tedy položit na váhy závaží o hmotnosti 68 jednotek.

Řešení J-III-1-4

Marcus musí trefit aspoň jednou 10, neboť druhé nejvyšší číslo 5 nemůže dát při nejvyšším počtu zásahů 28 ($5 \cdot 5 = 25$).

Předpokládejme, že trefí 10 jednou. Marcus musí dále zasáhnout aspoň třikrát 5, aby mohl součet čísel dosáhnout 28, neboť $10+5+3\cdot 3 = 24 < 28$ a $10+2\cdot 5+2\cdot 3 = 26 < 28$. Marcus tedy trefí 5 třikrát a zbývá mu trefit jednou trojku

$$10 + 3 \cdot 5 + 3 = 28.$$

Pokud by trefil 5 čtyřikrát, přesáhne součet 28 ($10 + 4 \cdot 5 = 30 > 28$) Jiná možnost tedy není.

Marcus ale může 10 trefit dvakrát. Zbývají tři pokusy tak, aby součet dal dohromady 8. Marcus tedy nemůže trefit ani jednou 5, neboť $5 + 2 + 2 = 9 > 8$. Jedinou možností je

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 28.$$

Marcus nemůže trefit 10 třikrát, existují proto pouze dvě možnosti

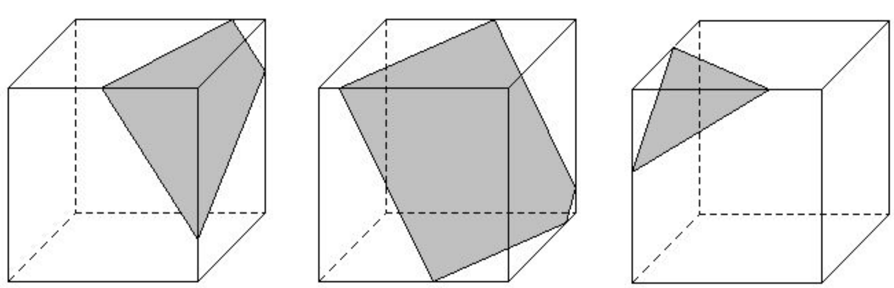
$$10,\ 5,\ 5,\ 5,\ 3$$

a

$$10,\ 10,\ 3,\ 3,\ 2.$$

Řešení J-III-1-5

Ze všeho nejdříve bychom si měli uvědomit, co se myslí řezem nějakého tělesa. Tím se vlastně míní průnik nějaké roviny – roviny řezu – s tímto tělesem. Přesně to odpovídá tomu, když si ukrojíte krajíc chleba a díváte se, jaký tvar (myslí se tvar jeho podstavy) váš krajíc má. Pro ilustraci se podívejte na obrázek, jak může řez krychlí vypadat.



Nyní se ještě zamyslíme nad tím, jaké vlastnosti má pravidelný pětiúhelník. Pravidelný pětiúhelník má všechny strany shodné a také všechny vnitřní úhly shodné. Víte také dobře, že žádné dvě strany pravidelného pětiúhelníku nejsou rovnoběžné.

Když se nyní podíváte opět na ilustrační obrázek, zjistíte, že pokud je řezem pětiúhelník (v tomto případě nepravidelný), má vždy alespoň jednu dvojici rovnoběžných stran. Proto není možné rozříznout krychli tak, aby řezem byl pravidelný pětiúhelník. (Je to v rozporu s tím, že pravidelný pětiúhelník má všechny dvojice stran různoběžné.)

Kos, Matěj a Bára tedy museli královně víl Pallandriel říct, že její úkol je nesplnitelný a vysvětlit, proč tomu tak je!