Řešení 3. série III. ročníku kategorie JUNIOR

Řešení J-III-3-1

Původní strany jezírka si označíme x krápní a y krápní. Jeho obsah označíme S a můžeme ho vyjádřit $S = x \cdot y$ krápní^2. Nové jezírko (po kouzlu čaroděje Zlovuse) má jednu stranu o 5 krápní kratší a druhou o 4 krápně delší. Pokud si strany nového jezírka označíme x' a y' (krápní) a jeho obsah S' (krápní^2, nadále budeme pomocné výpočty uvádět bez jednotek), pak platí

$$x' = x + 4,$$

$$y' = y - 5,$$

$$S' = (x + 4) \cdot (y - 5).$$

Uvědomme si, že nezáleží na tom, zda stranu y zmenšujeme a stranu x zvětšujeme nebo obráceně. Navíc víme, že nové jezírko má dvojnásobnou rozlohu než původní. Můžeme tedy psát

$$S' = 2 \cdot S.$$

Po dosazení dostáváme rovnici

$$2 \cdot x \cdot y = (x + 4) \cdot (y - 5).$$

Úpravami získáme vyjádření neznámé y

$$y = \frac{5 \cdot (x + 4)}{4 - x}.$$

Rozměry jezera mají být v celých krápních, proto za neznámou x budeme dosazovat jen přirozená čísla. Navíc je zřejmé, že x je nejvýše 3 krápně, protože pro $x = 4$ krápně by výraz pro y neměl smysl a kdyby bylo x více než 4 krápně, pak by y bylo záporné, což pro délku strany nemůže nastat.

Pokud zvolíme $x_1 = 1$ krápeň, pak $y_1 = \frac{25}{3}$ krápně, což není celé číslo. Tedy tyto délky nevyhovují podmínkám zadání.

Pokud zvolíme $x_2 = 2$ krápně, pak $y_2 = 15$ krápní. To podmínkám vyhovuje. Nové rozměry by byly pak $x'_2 = 6$ krápní a $y'_2 = 10$ krápní a obsah nového jezera $S'_2 = 60$ krápní^2.

Pokud zvolíme $x_3 = 3$ krápně, pak $y_3 = 35$ krápní. To také podmínkám vyhovuje. Nové rozměry by byly pak $x'_3 = 7$ krápní a $y'_3 = 30$ krápní a obsah nového jezera $S'_2 = 210$ krápní^2.

Protože nové jezírko má mít největší možnou rozlohu, hledané rozměry jsou 7 krápní a 30 krápní.

Řešení J-III-3-2

Označme si původní cenu prvního páru bot jako x a cenu druhého páru jako y. Jestliže na prvním páru prodělal 20%, znamená to, že boty prodal za 80% původní ceny, tj. za $\frac{80}{100}x$.

Jelikož na druhém páru vydělal 20%, musel ho prodat za 120% z původní ceny, tj. za $\frac{120}{100}y$.

Protože ceny, za které oba páry bot prodal, byly stejné, můžeme psát

$$\frac{80}{100}x = \frac{120}{100}y,$$

což můžeme vyjádřit vztahem

$$x = \frac{3}{2}y.$$

Nyní stačí, když si vyjádříme původní cenu obou párů bot a cenu obou párů bot, za které je prodal, a pak obě ceny porovnáme.

Původní cena obou párů $(x + y)$ je

$$(x + y) = \frac{3}{2}y + y = \frac{5}{2}y.$$

Cena, za kterou oba páry prodal je $\frac{80}{100}x + \frac{120}{100}y$, neboli

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}y + \frac{6}{5}y = \frac{12}{5}y.$$

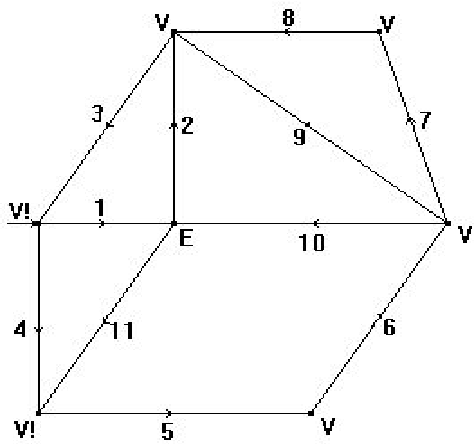
Porovnejme původní a novou cenu obou párů bot. Protože

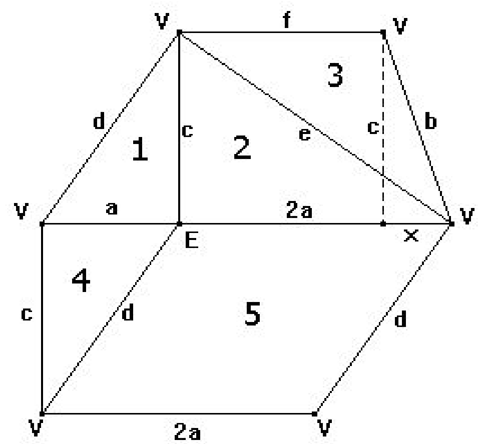
$$\frac{5}{2}y = \frac{25}{10}y > \frac{24}{10}y = \frac{12}{5}y,$$

je cena, za kterou oba páry prodal, nižší než cena, za kterou oba páry koupil. To znamená, že na celém obchodě prodělal.

Řešení J-III-3-3

Na obrázku je jedno z možných řešení, jak projít bludištěm. Správných způsobů je samozřejmě více, ale vždy musíme použít pouze jeden ze dvou vchodů s lichým počtem cest (na obrázku jsou zvýrazněny) a druhý je pak východ. Přijdeme-li totiž po nějaké cestě na křižovatku, po jiné, ještě nepoužité, musíme odejít. Vždy tedy k cestě, která „vede do“ křižovatky, musí existovat druhá, která „vede z“ křižovatky, proto potřebujeme sudý počet cest. To ale pochopitelně neplatí v místě vchodu, resp. východu.





Ze zadání známe délky cest 1 (a), 5 ($2a$), 7 (b) a 10 ($2a$). Délky ostatních cest musíme dopočítat.

Útvary 1 a 4 jsou pravoúhlé trojúhelníky, kde známe délku jedné odvěsny a obsah. Odtud můžeme vypočítat délku druhé odvěsny.

$$S_1 = \frac{a \cdot c}{2},$$

$$c = \frac{2S_1}{a},$$

$$c = \frac{2 \cdot 60000}{300} \text{ krápní} = 400 \text{ krápní}.$$

Dále pak podle Pythagorovy věty i délku přepony.

$$d^2 = a^2 + c^2,$$

$$d = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$d = \sqrt{300^2 + 400^2} \text{ krápní} = 500 \text{ krápní}.$$

Útvar 2 je také pravoúhlý trojúhelník, kde známe délky obou odvěsen. Opět pomocí Pythagorovy věty tedy můžeme dopočítat délku přepony e.

$$e^2 = (2a)^2 + c^2,$$

$$e = \sqrt{(2a)^2 + c^2},$$

$$d = \sqrt{(2 \cdot 300)^2 + 400^2} \text{ krápní} \doteq 721 \text{ krápní}.$$

Zbývá nám dopočítat délku cesty f. Spojením útvarů 2 a 3 je lichoběžník se základnami $2a$ a f a výškou c. Délku kratší základny f můžeme vyjádřit pomocí neznámé x (viz obrázek) a délky delší základny. Neznámou x můžeme vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou b a odvěsnou c pomocí Pythagorovy věty.

$$b^2 = c^2 + x^2,$$
$$x = \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Dále

$$f = 2a - x$$

a dosazením

$$f = 2a - \sqrt{b^2 - c^2},$$
$$f = 2 \cdot 300 - \sqrt{427^2 - 400^2}\ \text{krápní} = 450\ \text{krápní}.$$

Délky všech cest jsme již vyjádřili. Můžeme tak určit, kolik krápní měří cesta po celém bludišti. (Všimněte si, že jsme údaj o obsahu útvaru 3 nepoužili.) Sečteme tedy délky všech cest v bludišti a to v pořadí, v jakém bludiště procházíme, abychom na nějakou cestu nezapomněli nebo ji neuvažovali dvakrát.

$$a + c + d + c + 2a + d + b + f + e + 2a + d \doteq 5398\text{krápní}.$$

Kamarádi musí nasypat do poháru víly Enero 5 398 perel, aby ji zachránili.

Řešení J-III-3-4

Nejprve si uvědomme, že měsíc musí začínat pondělkem. Kdyby totiž začínal jiným dnem, byl by den vyplutí z Korálového útesu shodný se dnem, kdy navštívil Sluneční zátoku. Zdůvodnění je nazdačeno ve schématu.

Měsíc začíná jiným dnem než pondělkem:

So Ne **Po** Út St ...
↓
první pondělí v měsíci by bylo zároveň prvním pondělím po první neděli

Měsíc začíná pondělkem:

Po Út St Čt Pá So Ne **Po**
↓ ↓
první pondělí v měsíci   první pondělí po první neděli

Následující měsíc musí končit sobotou. Pokud by totiž končil jiným dnem, pak by den, kdy byl v Lacitě, byl stejný jako den, kdy byl v Kabeře. Vysvětlení můžeme najít opět ve schématu:

Měsíc končí jiným dnem než sobotou:

Čt   Pá   **So**   Ne   Po   ...

$\downarrow$

poslední sobota v měsíci je zároveň poslední sobota před poslední nedělí

Měsíc končí sobotou:

So   Ne   Po   Út   St   Čt   Pá   **So**

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

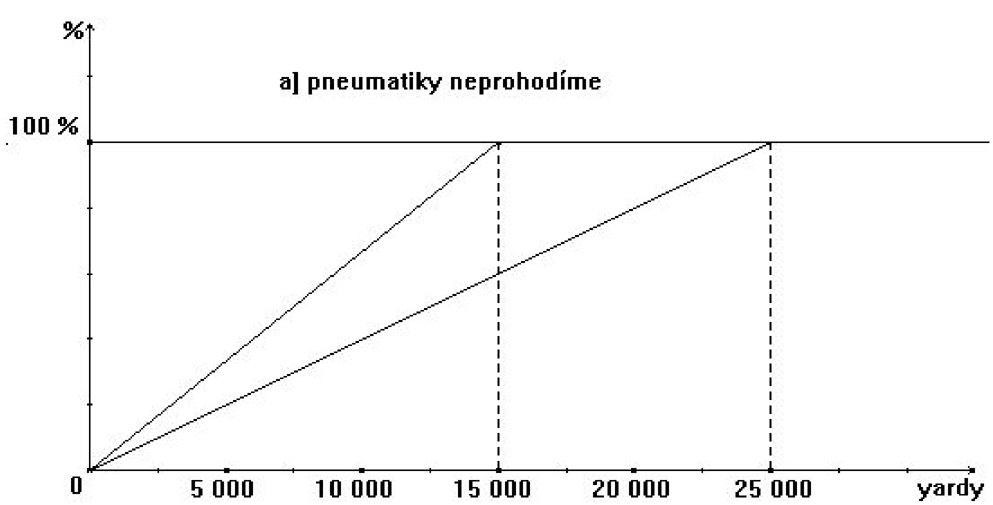
poslední sobota před poslední nedělí   poslední sobota v měsíci

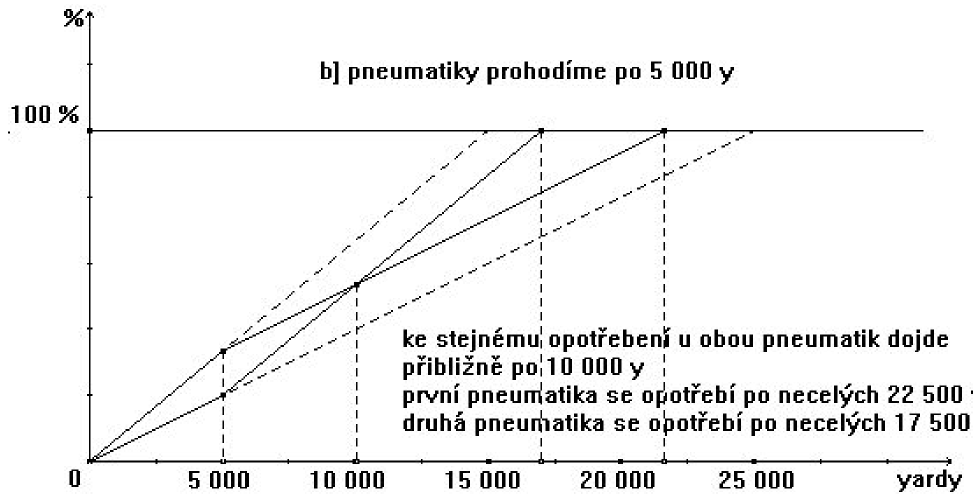
Jestliže má první měsíc začínat pondělkem a následující měsíc má končit sobotou, musí mít oba měsíce dohromady 62 dní, to znamená každý měsíc 31 dní. To nastává jen v případě červenec – srpen a prosinec – leden. Podíváme-li se do kalendáře, zjistíme, že za poslední tři roky tato situace nastala dvakrát, a to červenec – srpen roku 2002 a prosinec – leden 2003. Ze zadání lze odvodit, že vyplul nejspíš 1. července 2002, protože to měl být slunný den a v průběhu plavby se námořník koupal.

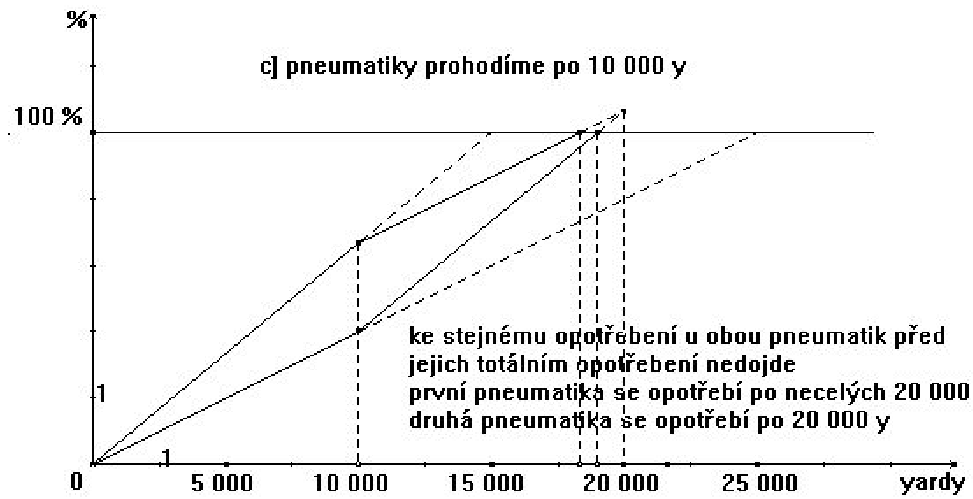
Řešení J-III-3-5

Na předním kole se pneumatika opotřebí po 15 000 yardech, což znamená, že po ujetí této dráhy dojde ke 100% opotřebení. Na zadním kole dojde ke 100% opotřebení po 20 000 yardech. Načrtněme si (pro lepší orientaci) graf závislosti opotřebení na ujetých yardech, a to

- a) pokud pneumatiky neprohodíme
- b) pokud je prohodíme po 5 000 yardech
- c) pokud je prohodíme po 10 000 yardech







Chceme, aby obě pneumatiky ujely co nejdelší vzdálenost. To v grafu znamená, aby se polopřímky příslušející opotřebení obou pneumatik protly právě na hraniční přímce označující 100% opotřebení. Poměr ujetých vzdáleností při 100% opotřebení můžeme vyjádřit

$$25\ 000 : 15\ 000 = 3 : 5.$$

V tomto poměru rozdělíme také 100% opotřebení, tj. $37,5\% : 62,5\%$. První pneumatiku vyměníme tedy po

$$15\ 000 \cdot \frac{62,5}{100}\ \mathrm{y} = 9\ 375\mathrm{y}$$

s druhou, která je v té chvíli opotřebována na 37,5%,

$$25\ 000 \cdot \frac{37,5}{100}\ \mathrm{y} = 9\ 375\mathrm{y}.$$