Řešení 1. série IV. ročníku kategorie JUNIOR

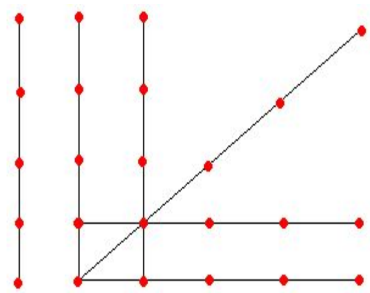
RJ-IV-1-1

Pokud bychom rozestavili 24 bust do šesti různých řad, potřebovali bychom 30 bust. My však máme pouze 24 bust. Musíme tedy 6 bust nějak ušetřit. To dokážeme tak, že umístíme jednu bustu do dvou nebo tří řad.

Pokud postavíme řady tak, že jedna busta bude společná třem řadám, a to uděláme dvakrát, ušetříme čtyři busty. Podobným postupem, tak že dvě busty budou společné dvěma řadám ušetříme další dvě busty. Tím je úloha splněna.

Busty lze samozřejmě poskládat všemožně. Od situace, kdy vždy dvě řady mají společnou jednu bustu (může vzniknout šestiúhelník), až po hvězdici, kdy je jenda busta společná pěti řadám a poslední řada má společnou bustu s dalšími dvěma řadami.

Vyřešená úloha by mohla vypadat takto:



obr. 1

RJ-IV-1-2

Důležité je, zadání si nejprve pečlivě přečíst. Pak si zvolíme větu, ve které je udáno, že alespoň dva učenci jdou těsně za sebou, nebo víme, kolik učenců jde mezi nimi, a tou začneme.

1. Můžeme tedy začít větou „Harmonius přišel ještě před tím, který přišel před Oktaniem.“ Tedy pořadí musí být:

   Harmonius, ______ , Oktanius

2. Dále budeme pracovat s větami, která jsme již do schématu použili. Jednak „Pentilius přišel po Harmoniovi.“

Harmonius, Pentilius, Oktanius

3. Dále „Oktanius před Kubikem."

Harmonius, Pentilius, Oktanius, Kubikus

4. „Trianglos přišel dlouho před Kubikem." Trianglos přišel před všemi, které jsme již uvažovali. Nevíme, ale přesně před kým.

Trianglos, ……, Harmonius, Pentilius, Oktanius, Kubikus

5. „Trianglos až za Kvadrikem."

Kvadrikus, Trianglos, ……, Harmonius, Pentilius, Oktanius, Kubikus

6. „Kvadrikus přišel po tom, který přišel po Logiovi." nevíme ale ještě, kdo přišel po Logiovi.

Logius, ______, Trianglos, ……, Harmonius, Pentilius, Oktanius, Kubikus

7. Zbývá nám poslední jméno. Víme, že „Logius přišel před Astrosem." Proto

Logius, Astros, Trianglos, Harmonius, Pentilius, Oktanius, Kubikus

Nyní jsou ve schématu zapsáni všichni a to také musí být pořadí, v jakém přišli k bohyni Pallas Atheně.

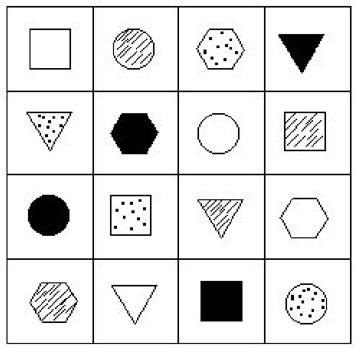
RJ-IV-1-3

Způsobů, jak řešit tuto úlohu, je jistě mnoho. My si ukážeme jeden efektivní. Nejdříve si na hlavní diagonálu (tj. úhlopříčka z levého horního do pravého dolního rohu) dáme všechny obrazce tak, aby se neopakovaly. Následně je vybarvíme opět tak, aby se na diagonále nevyskytly stejné barvy. Výběr obrazců a barev je náhodný (viz obr. 2).

Nyní si doplníme druhé políčko v prvním řádku. Protože v řádku je už čtverec a ve sloupci pod druhým políčkem je šestiúhelník, nemůžeme tam již tyto dva útvary umístit. Stejně, jako tam nemohou být takto vybarvené obrazce. Zbývá nám tedy vyšrafovaný kruh nebo puntíkovaný trojúhelník. Zvolme tedy např. vyšrafovaný kruh. Puntíkovaný trojúhelník musí už zcela jistě být ve druhém řádku v prvním políčku.

Do třetího polička prvního řádku můžeme dát jedině šestiúhelník, který je vybarven jenom jediným možným způsobem, aby byli splněny podmínky, a to je puntíkovaný obrazec.

Všechna další políčka jsou už vynucená, to znamená, že existuje jediný obrazec s jediným vybarvením, který do něj můžeme umístit.



obr. 2

Vše jsme odvodili z rozmístění obrazců na hlavní diagonále a jediné volby obrazce (ze dvou možností) na druhé políčko prvního řádku. Mohli bychom tedy snadno říci, kolik má tato úloha řešení. Na diagonálu dáváme čtyři různé obrazce, které mohou být vybarveny čtyřmi možnými způsoby. Stačí si uvědomit, že těchto možností je $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 576$. Po umístění obrazců na diagonálu jsme měli jedinou možnost volby, a to ze dvou obrazců. Celkový počet všech rozmístění obrazců do čtverce je tedy $2 \cdot 576 = 1152$. Samozřejmě, že některé z těchto možností jsou jen vzájemně zrcadlově otočeny.

RJ-IV-1-4

Pythagoras si vzpomněl, že v této úloze šlo o nějaké trojúhelníky. Tak se na ně zaměříme. Dorýsujeme úhlopříčku BD a průsečík BD s úhlopříčkou AC označíme P. Průsečík úhlopříčky AC s úsečkou SD označíme T. Střed úsečky AB označme S (viz obr. 3).

Úhlopříčka BD dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky ABD a BCD. V $\triangle ABD$ jsou úsečky DS a AP jeho těžnicemi a bod T těžištěm. Jak je již známo, těžiště leží v $\frac{1}{3}$ těžnice. Proto je $|AT| = \frac{2}{3}|AP|$.

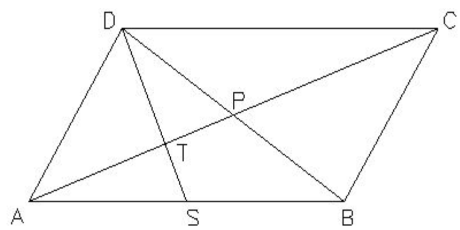
Dále víme, že $|AP| = \frac{1}{2}|AC|$, proto

$$|AT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{3}|AC|,$$

neboli

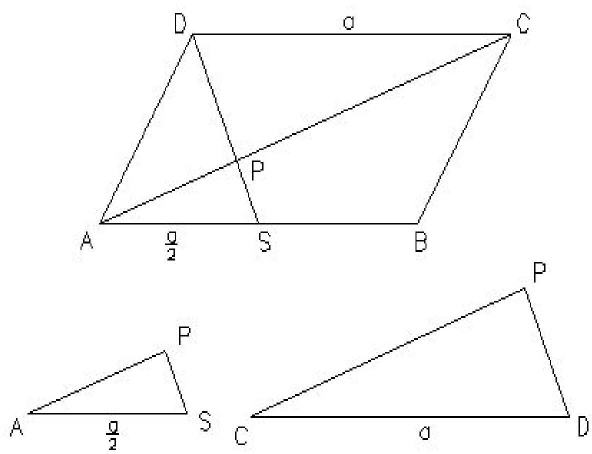
$$|AT| : |TC| = 1 : 2.$$

Můžeme tedy vyslovit odpověď: Spojnice strany AB s vrcholem D dělí úhlopříčku AC rovnoběžníku $ABCD$ v poměru $1 : 2$.



obr. 3

Úlohu je ale možné řešit i jiným způsobem. Nejprve si označíme body, které budeme potřebovat. Průsečík úhlopříčky AC s úsečkou SD označíme P. Střed úsečky AB označme S.



obr. 4

V rovnoběžníku vzniklo několik trojúhelníků. Ale všimněme si $\triangle ASP$ a $\triangle CPD$. Úhel PAS v $\triangle ASP$ je střídavý s úhlem PCD v $\triangle CDP$ a stejně tak úhel ASP v $\triangle ASP$ je střídavý s úhlem CDP v $\triangle CDP$. Jak víme střídavé úhly mají stejnou velikost. Můžeme proto říct, že $\triangle ASP$ a $\triangle CDP$ jsou podle věty *uu* trojúhelníky podobné. Strana AB má délku a. Víme, že bod S leží v polovině strany AB, a proto délka základny AS $\triangle ASP$ je $\frac{a}{2}$. Dále víme, že $\triangle CDP$ má délku základny také a. Strana AS $\triangle ASP$ je se stranou CD $\triangle CDP$ v poměru $1:2$. Jelikož to jsou trojúhelníky podobné, tak ve stejném poměru bude i strana AP $\triangle ASP$ se stranou CP $\triangle CDP$.

To už jsme pomohli Pythagorovi vyřešit jeho problém. Spojnice strany AB s vrcholem D dělí úhlopříčku AC rovnoběžníku $ABCD$ v poměru $1:2$.

RJ-IV-1-5

Nejprve si musíme skupinu osmi kuliček rozdělit na menší skupiny, u kterých při jednom vážení dokážeme určit, která z kuliček je nejtěžší. To dokážeme určit u skupiny s nejvýše třemi kuličkami. Proto si osm kuliček rozdělíme na dvě skupiny po třech kuličkách a jednu skupinu po dvou kuličkách.

Na váhy vložíme obě skupiny po třech kuličkách a zvážíme. Pokud jsou váhy v rovnováze, je těžší kulička ve zbývající skupině dvou kuliček. Tyto dvě kuličky vložíme na váhy a ty nám ukážou nejtěžší kuličku.

Pokud při prvním vážení nejsou váhy v rovnováze, vezmeme skupinu tří kuliček, která je těžší. Z ní vybereme dvě kuličky a ty zvážíme. Pokud jsou váhy v rovnováze, je nejtěžší kulička ta třetí, zbývající. Pokud nejsou, váhy nám přímo ukázaly nejtěžší kuličku.