Řešení 5. série IV. ročníku kategorie JUNIOR

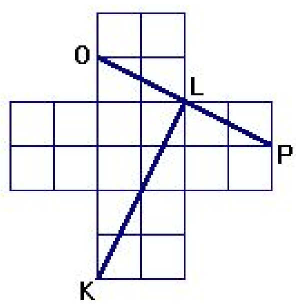
RJ-IV-5-1

Kříž tvoří dohromady 20 čtverců. Každý čtverec můžeme označit jako jednotkový, což znamená, že velikost jeho strany je 1 j (=jednotka). Potom můžeme říci, že obsah daného kříže tvořeného z 20 čtverců je 20 j^2 a stejný obsah má mít i hledaný čtverec.

Obsah čtverce se vypočítá pomocí vzorce $S = a^2$, kde a je strana čtverce. Do vzorce dosadíme známý obsah a vyjádříme stranu a čtverce, který nám má z kříže vzniknout:

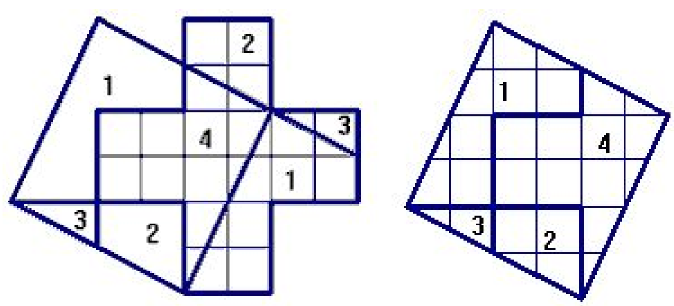
$$20\ j^2 = a^2,$$
$$a = \sqrt{20}\ j.$$

Víme tedy, že velikost strany hledaného čtverce je $\sqrt{20}\ j$. Úsečku takové délky dostaneme pomocí Pythagorovy věty jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délky 2 j a 4 j.



obr. 1

Hledanou délku mají v kříži úsečky KL a OP (viz obr. 1). Těmi můžeme vést řez. Oba řezy rozdělí čtverec na 4 díly, ze kterých složíme požadovaný čtverec (viz obr. 2).



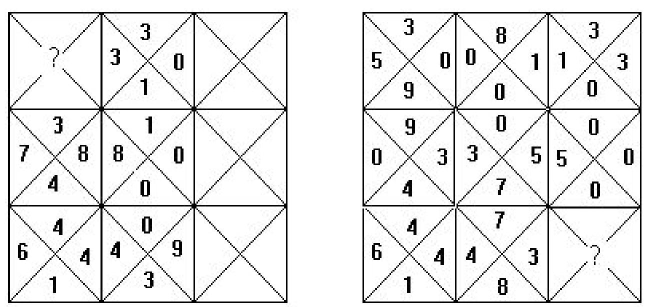
obr. 2

RJ-IV-5-2

Nejprve, prosím, přijměte omluvu. Při psaní zadání řádil šotek Naschválníček. Omylem jsme zadali úlohu, která nemá řešení. Námi zamýšlený hlavolam měl obsahovat v posledním čtverečku vpravo dole v horním políčku číslo 3 místo čísla 0. Omlouváme se.

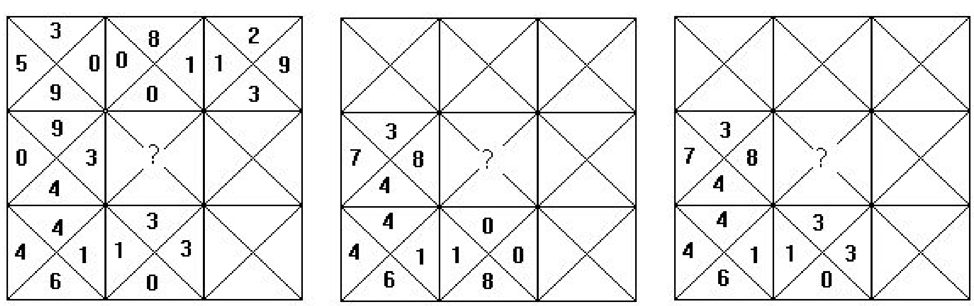
Pojďme tedy hledat zdůvodnění, proč úloha nemá řešení. Číslo 6 a číslo 2 se v celém hlavolamu vyskytuje jen v jediném čtverečku. Tyto čtverečky musí být tedy na okraji velkého čtverce. Začněme např. od čísla 6 (to proto, že se nám bude dobře navazovat na sousední čtyřky). Čtvereček s číslem 6 můžeme umístit buď do rohu nebo na kraj uprostřed. Pojďme postupně vyčerpávat jednotlivé možnosti.

Čtvereček umístíme do rohu tak, že na kraji bude kromě čísla 6 také číslo 1. Pak máme dvě možnosti jak připojit čtverečky se čtyřkami. Viz obrázek 3. V obou případech je jen jediná možnost pro prostřední čtvereček. Další kroky jsou také vynucené. Nepodaří se nám ale umístit všechny čtverečky. Takové umístění čtverečku se šestkou tedy nemá řešení.



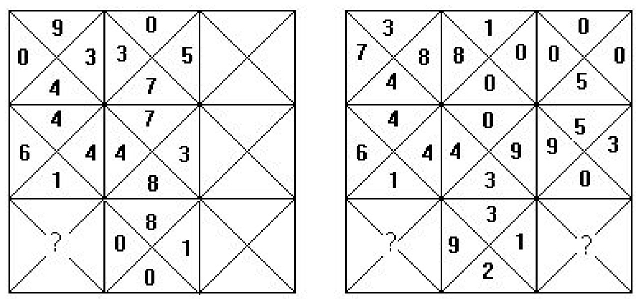
obr. 3

Čtvereček umístíme do rohu tak, že na kraji bude kromě čísla 6 také číslo 4. Na čtyřku můžeme navázat dvěma způsoby. Na obrázku 4 jsou opět zakresleny čtverečky, jejichž poloha je už vynucená. Opět nenajdeme řešení.



obr. 4

Další možnost, která může nastat je, že čtvereček s číslem 6 je v krajní řadě uprostřed. Opět máme dvě možnosti, jak navázat na čtyřku. Další kroky jsou znovu vynucené. Nakonec dospějeme k rozložení, které nelze dokončit. Při všech úvahách jsme samozřejmě využívali toho, že také čtvereček s číslem 2 musím být na kraji.



obr. 5

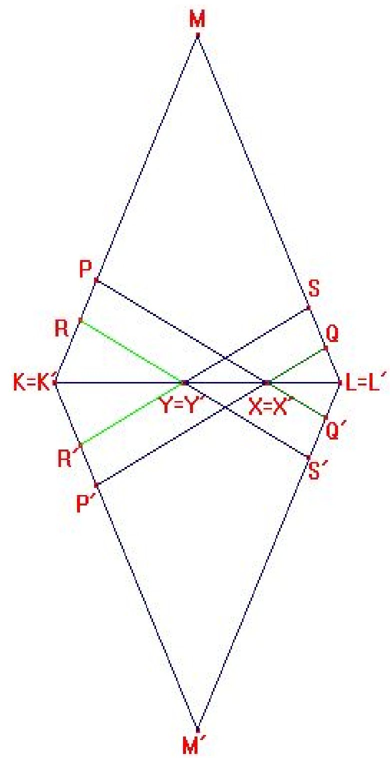
Poznamenejme na závěr, že není třeba uvažovat, ve kterém rohu nebo na které straně čtvereček s číslem 6 je, protože jednotlivé případy lze na sebe převést otočením.

Dokázali jsme tak, že úloha řešení nemá.

RJ-IV-5-3

Postupů řešení je jistě mnoho. Zkusme využít osové souměrnosti, tj. shodného zobrazení, tj. zobrazení, které zachovává délky úseček a velikosti úhlů (tedy také kolmost).

Zobrazíme-li trojúhelník KLM v osové souměrnosti podle osy KL, snadno nahlédneme (viz obr. 3), že pro libovolný bod X jeho základny je $|XQ| = |XQ'|$, proto $|XQ| + |XP| = |PQ'|$. Protože je $KM||M'L$ a také $PX||RY$ pro libovolné body X, Y základny, je pro libovolné dva body základny také $|PQ'| = |RS'|$. Tím je tvrzení dokázáno.



obr. 3

RJ-IV-5-4

Označme si hledané číslo $abcde$, kde $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ jsou číslice hledaného čísla a $a \neq 0$. Pak podle zadání musí být $b = a^2$, proto $a \in \{1,\ 2,\ 3\}$ a tudíž $b \in \{1,\ 4,\ 9\}$. (Protože se jedná o číslice!)

Dále má být $d = b \cdot c$, což lze zapsat také jako $\frac{d}{b} = c$. Z poslední podmínky totiž víme, že $d \neq 0$, protože $\frac{b}{d} = e$. Čísla e a c jsou tedy převrácená a protože jde zároveň o číslice, musí být $e = c = 1$ a $b = d$.

Řešením jsou tedy čísla 11 111, 24 141, 39 191.

RJ-IV-5-5

Označme obě dvouciferná čísla jako AB a CD, kde písmena A, B, C, D označují cifry, které potřebujeme dopočítat, tedy $A,\ B,\ C,\ D \in \{0,\ 1, \ldots,\ 9\}$, $A,\ C \neq 0$. Ze zadání víme, že $AB \cdot CD = 2176$ a $BA \cdot DC = 1978$. Levá cifra určuje počet desítek a pravá počet jednotek. Přepíšeme tedy čísla do tvaru $AB = 10 \cdot A + B$, $CD = 10 \cdot C + D$, $BA = 10 \cdot B + A$, $DC = 10 \cdot D + C$. Tato čísla dosadíme do rovností ze zadání. Tedy

$$AB \cdot CD = 2176 = 100 \cdot A \cdot C + 10 \cdot (A \cdot D + B \cdot C) + B \cdot D \qquad (1)$$

$$BA \cdot DC = 1978 = 100 \cdot B \cdot D + 10 \cdot (B \cdot C + A \cdot D) + A \cdot C \qquad (2)$$

Ze vztahu (1) vyplývá, že součin $A \cdot C \leq 21$ a součin $B \cdot D$ má na místě jednotek cifru 6. Z druhého vztahu plyne, že součin $B \cdot D \leq 19$ a součin $A \cdot C$ má na místě jednotek cifru 8. Odečtením rovnosti (2) od rovnosti (1) dostaneme rovnost $2176 - 1978 = 198 = 99 \cdot A \cdot C - 99B \cdot D$. Tuto rovnost dále upravíme a získáme vztah $2 + B \cdot D = A \cdot C$, tj. součin $A \cdot C$ je o 2 větší než součin $B \cdot D$.

Z těchto pěti podmínek plyne, že součin $A \cdot C$ je roven buď 8 (a součin $B \cdot D$ je o 2 menší, tedy 6) nebo 18 ($B \cdot D = 16$). Nyní si s trochou práce můžeme dosadit všechny varianty a zjistit tak výsledné cifry (tedy i hledaná čísla). Samozřejmě můžeme vymyslet další omezující podmínky jako například tu, že všechny cifry A, B, C, D jsou větší než 1. Tato podmínka vychází z toho, že kdyby jedno číslo mělo na místě desítek 1, tak i kdyby ostatní cifry byly 9, nikdy nedostaneme číslo větší než 1978 ($19 \cdot 99 = 1881 < 1978$).

Je-li $A \cdot C = 18$, pak můžou nastat tyto varianty:

1. $A = 2,\ C = 9$
   (a) $B = 2,\ D = 8$
   (b) $B = 9, D = 2$
2. $A = 3,\ C = 6$
   (a) $B = 4,\ D = 4$
3. $A = 6,\ C = 3$
   (a) $B = 4,\ D = 4$
4. $A = 9,\ C = 2$
   (a) $B = 2,\ D = 8$
   (b) $B = 9, D = 2$

Je ovšem vidět, že varianta 1 je obdobou varianty 4 a varianta 2 je obdobou varianty 3. Varianty nejsou shodné, nicméně výsledná dvojice čísel AB a CD je stejná.

Tabulka s jednotlivými propočty

A	B	C	D	$AB \cdot CD$	$BA \cdot DC$
2	2	9	8	2156	1958
2	8	9	2	2576	2378
3	4	6	4	2176	1978
2	2	4	3	946	748
2	3	4	2	966	768

Zvýrazněný řádek označuje naše hledaná čísla. Hledaná čísla tedy jsou 34 a 64.