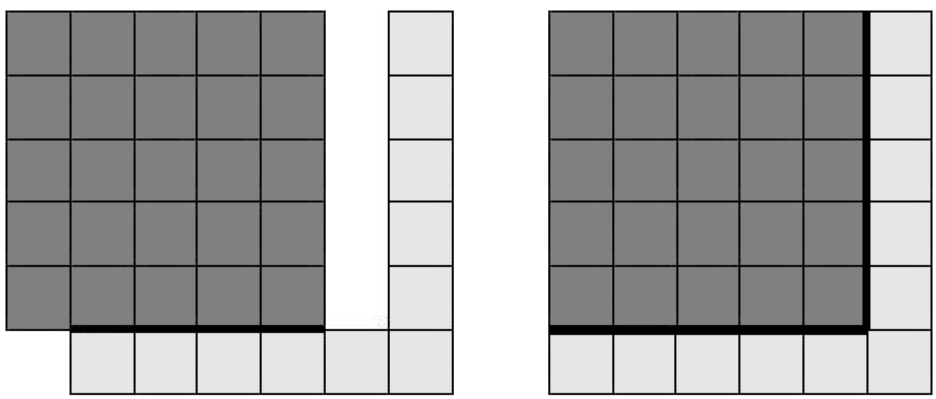
Řešení 1. série VI. ročníku kategorie JUNIOR

RJ-VI-1-1

Stačí, když nejprve začneme měřit čas oběma hodinami zároveň. Když se dosypou sedmiminutové, ihned je znovu otočíme a začneme odměřovat druhých 7 minut. Ve chvíli, kdy se dosypou i jedenáctiminutové, je ze sedmiminutových odsypáno 4 minuty a zbývají ještě 3 minuty. Proto právě v tento okamžik můžeme začít odměřovat 3 minuty. Až se (podruhé) sedmiminutové hodiny dosypou, uplynuly 3 minuty.

RJ-VI-1-2

Špatně sestavenou mapu můžeme rozdělit mnoha způsoby. Záleží na tom, jestli jsou oba díly lícem nahoru (či dolů) nebo jsou každý jinak. Na obrázcích 1 a 2 jsou dva možné způsoby. Silná čára naznačuje, kde budeme stříhat.

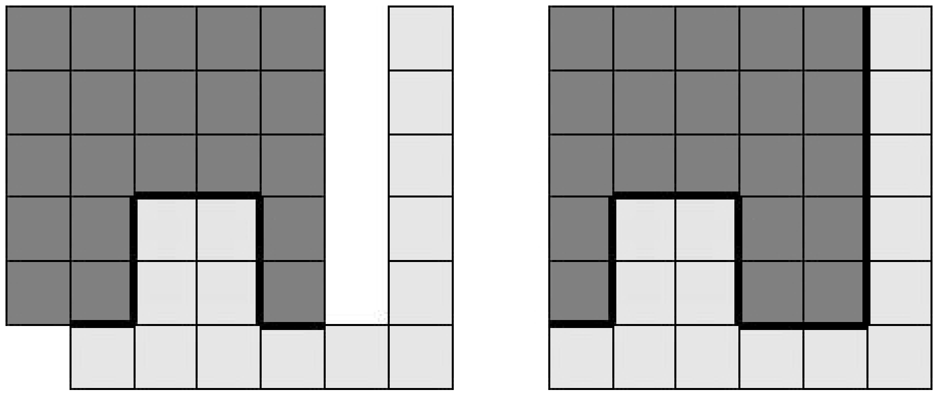


Obrázek 1: Oba díly mapy jsou stejně (ale i opačně)

RJ-VI-1-3

V zadání máme dáno 9 různých písmen a my je máme nahradit čísly od 1 do 9 tak, aby se neopakovala a aby splňovala danou rovnost. Nejdříve zjistíme, čemu se mohou jednotlivé součty ve sloupcích rovnat a systematickou metodou pokus-omyl budeme postupovat dál. Začneme zleva.

$J + M = 3$ nebo $J + M = 4$ nebo $J + M = 5$. První možnost nemůže nastat, protože $E + N$ (případně + převod z předcházejícího řádu) nemůže dát 23. Podobně nemůže nastat ani poslední rovnost, protože na písmena E a N by pak nezbyly číslice. Může nastat jedině $J + M = 4$, odtud $J = 1$ a



Obrázek 2: Díly mapy jsou různě

$M = 3$ nebo $J = 3$ a $M = 1$. Dále se již tato písmena nevyskytují, proto přijmeme obě řešení jako správná. Číslice 1 a 3 jsou už vyčerpány a navíc víme, že $E + N \geq 10$.

Že se nemůže nastat $E + N = 13$, lehce vyloučíme. To by totiž muselo nastat $D+D+O = 3$ a to nejde. Proto musí být $E+N = 12$ nebo $E+N = 11$.

Se součtem $D + D + O$ to bude mírně náročnější. Rovnost 3 jsme již vyloučili (2 také). Musíme také vyloučit 13 a 23. $E + V + H$ se totiž nikdy nemůže rovnat 7 (popřípadě 6 nebo pěti), protože jsme již využili čísla 1 a 4. Podobně vyloučíme i součet 11 a 21. Maximální součet pro $E + V + H$ je $9 + 8 + 7 = 24$, nemůžeme tedy dostat 27, 26 ani 25. Zbývají tedy dvě možnosti: $D + D + O = 12$ nebo $D + D + O = 22$.

Podobně budeme postupovat se součtem $E+V+H$. Díky předcházejícím úvahám můžeme vyloučit součty 7, 6, 5 a 27, 26, 25. Není možný ani součet 17, protože $N + A + O$ se nikdy nemůže rovnat 4. Zbývají zase tedy opět možnosti, a to $E + V + H = 16$ nebo $E + V + H = 15$.

Nakonec musí platit $N + A + O = 14$ nebo $N + A + O = 24$.

A teď se konečně můžeme přesunout ke slibované metodě pokus-omyl. Vyjdeme z rovnosti $E + N = 11$, tzn. $E = 4$ a $N = 7$ nebo naopak nebo $E = 5$ a $N = 6$ nebo naopak.

Kdyby $E = 4$ a $N = 7$, pak z $N + A + O = 14$ máme $A + O = 2 + 5$. V tuto chvíli jsme použili číslice 1, 2, 3, 4, 5 a 7 a víme, že $D+D+O = 22$. Ale kdyby $O = 5$, pak by $2D = 17$. Není možné ani $O = 2$, pak by $D = 10$, a to není číslice. Tato možnost nemůže nastat. Mohlo by být také $N+A+O = 24$, kde $A + O = 9 + 8$. Použili jsme tedy číslice 1, 3, 4, 7, 8 a 9, zbývají nám tedy 2, 5 a 6. Protože $2D + O = 22$, musí být $O = 8$ a $D = 7$. To ale nemůže nastat.

Uvažujme tedy, že $E = 7$ a $N = 4$, pak $N + A + O = 14$ a proto $A + O = 10 = 2 + 8$. (Použili jsme číslice 1, 2, 3, 4, 7 a 8). Proto stejně jako v předcházejícím $D + D + O = 22$ a $O \neq 2$, proto $O = 8$. Odtud také lehce dojdeme k tomu, že $D = 7$, což ale není možné. Ani tato možnost nevede k výsledku.

Kdyby $E = 5$ a $N = 6$, pak z $N + A + O = 14$ máme $A + O = 8$. Osmičku ale už nerozepíšeme jako součet dvou různých číslic, aniž bychom nepoužili už některou „obsazenou“. Ani tato možnost nevede k cíli.

Kdyby opačně $E = 6$ a $N = 5$, pak z $N + A + O = 14$ máme $A + O = 9 = 2 + 7$. Použili jsme číslice 1, 2, 3, 5, 6 a 7. Už z předchozího víme, že O musí být sudé, tedy $O = 2$. Potom ale zase dostaneme $D = 10$, což není možné.

Vyloučili jsme tedy všechny možnosti, kdy by se $E + N = 11$. Musí tedy platit $E + N = 12$, proto $D + D + O = 12$. Postupně opět projdeme všechny možnosti.

Kdyby $E = 4$ a $N = 8$, pak díky $2D + O = 12$ může být jedině $O = 2$ a $D = 5$. Vyčerpali jsme číslice 1, 2, 3, 4, 5 a 8. Pak ale pro písmena V a H už nám nezbývají vhodné číslice, aby daly součet 12 nebo 11. Tato možnost nemůže nastat.

Předpokládejme opačně, že $E = 8$ a $N = 4$. Jako v předcházejícím dojdeme k tomu, že $O = 2$ a $D = 5$. Součet $V + H$ může být tedy 7 nebo 8. Opět ale nemáme potřebné číslice. Ani tato možnost nemůže nastat.

Kdyby $E = 7$ a $N = 5$, pak kdyby $O = 2$, muselo by $D = 5$; kdyby $O = 4$, muselo by $D = 4$. Ani jedno nelze. Tedy $O = 8$ a $D = 2$. Kdyby dál $N + A + O = 14$, bylo by $A = 1$, a to nejde. Kdyby $N + A + O = 24$, bylo by $A = 11$, a to také nejde. Ani tato možnost nevede k cíli.

Nakonec nám zbývá $E = 5$ a $N = 7$. Díky $D + D + O = 12$ může (jako v předcházejícím) nastat jen $O = 8$ a $D = 2$. Použili jsme číslice 1, 2, 3, 5, 7 a 8. Pro $V + H = 11$ nám tedy už číslice nezbývají a musí být $V + H = 10 = 4 + 6$. Protože $N + A + O = 7 + A + 8$, je $A = 9$. Toto je tedy jediná možnost, která může nastat.

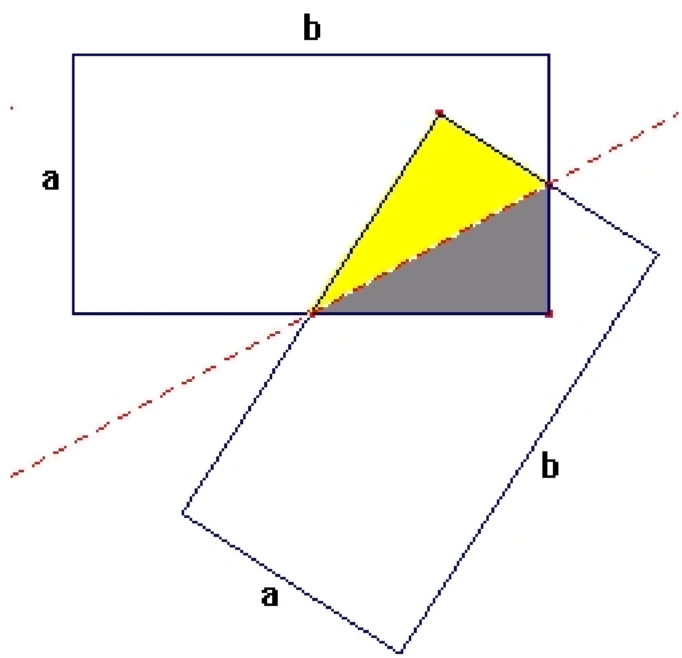
Navíc z příběhu víme, že $H < V$, proto řešením algebrogramu je

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 5 & 2 & 5 & 7 \\
+ & & & 2 & 6 & 9 \\
+ & 3 & 7 & 8 & 4 & 8 \\
\hline
 & 5 & 3 & 3 & 7 & 4
\end{array}
\quad \text{nebo} \quad
\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 5 & 2 & 5 & 7 \\
+ & & & 2 & 6 & 9 \\
+ & 1 & 7 & 8 & 4 & 8 \\
\hline
 & 5 & 3 & 3 & 7 & 4
\end{array}
$$

a číslem $ONOHO$ domu je 87 848.

RJ-VI-1-4

Nejprve si označme strany obdelníků jako a, b. Všimněme si, že vyšrafovanou část lze rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky. Víme, že se obdélníky překrývají v polovinách svých stran. Známe tak velikost základny trojúhelníku (jedna z odvěsen) $z = \frac{b}{2}$ a jeho výšky (druhá odvěsna) $v = \frac{a}{2}$.



Obrázek 3: Překrývající se obdélníky

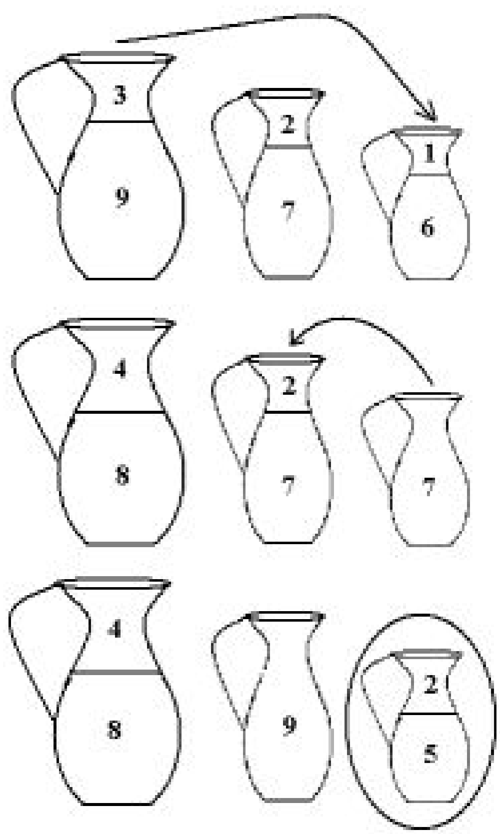
Pro obsah vyšrafované části S tak dostáváme:

$$S = 2S_{\triangle} = 2\frac{zv}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{1}{4}S_{\square}.$$

Převodní kola lokomotivy je tedy třeba nastavit v poměru 1 : 4.

RJ-VI-1-5

Nejprve dolijeme 7litrový džbán z největšího 12litrového tak, aby byl plný. Pak z tohto 7litrového odlijeme 2 litry do 9litrového džbánu, takže nám zbyde v nejmenším džbánu právě potřebných 5 litrů. Celý postup je zachycen na obrázku 4.



Obrázek 4: Přelévání vína

5 litrů jsme nemohli dostat odlitím nějakého množství ze džbánů hned na začátku. Z 9 litrů bychom totiž potřebovali odlít 4 litry, ze 7 litrů 2 litry a ze 6 litrů jeden litr. To nešlo ani jedním ani dvěma odlitími. Znamená to tedy, že nejprve musíme někam víno dolít a teprve potom odlít. Možností odněkud někam odlévat máme v jednom kroku celkem šest (jednou možností myslíme např. ze středního džbánu do největšího apod.). Projdeme-li je, snadno vyloučíme ty nemožné.