Řešení 1. série

Řešení S-I-1-1

Nejdříve si uvědomme, že platí následující vztahy

$$h = \frac{1}{2} v \cdot d,$$

$$h = \frac{1}{2} s \cdot k,$$

kde h je počet hran, v je počet vrcholů, d je stupeň vrcholu, s je počet stěn a k je počet úhlů každé stěny.

Dále víme, že $k \geq 3$ a s využitím Eulerovy věty můžeme sestavit následující tabulku:

s	k	h	v	d
12	3	18	8	36/8
12	4	24	14	48/14
12	5	30	20	60/20 = 3

Protože z Eulerovy věty máme

$$v = h - 10,$$

potom

$$d = \frac{2h}{v}.$$

Dále pokračovat v tabulce nemusíme, protože víme, že úloha má právě jedno řešení. Dostali jsme tedy, že pravidelný 12–stěn má 30 hran, 20 vrcholů se stupněm 3 a jeho stěny tvoří pravidelné 5–úhelníky.

Řešení S-I-1-2

Ze zadání zjistíme, že:

Ze 6 kuchařek	Ze 6 žen s pěknýma očima
2 pouze vaří	1 oči + vaří
1 vaří + oči	1 oči + vaří + počítá
2 vaří + počítají	1 oči + šperky
1 vaří + oči + počítá	2 oči + šperky + počítají
	1 oči + počítá

Ze 13 žen, které počítají	Z 9 žen se šperky
2 počítají + vaří	1 šperky + oči
1 počítá + vaří + oči	2 šperky + oči + počítají
1 počítá + oči	3 šperky + počítají
2 počítají + šperky + oči	3 jen šperky
3 počítají + šperky	
4 jen počítají	

Vlastnosti můžeme postupně zapisovat do tabulky:

Slečna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
vaří	V	V	V	V	V	V														
oči			O	O			O	O	O	O										
počítají				P	P	P	P	P	P		P	P	P	P	P	P	P			
šperk								Š	Š	Š	Š	Š	Š					Š	Š	Š

Žádná z žen nemá všechny čtyři uvedené vlastnosti. Požádat o ruku může tedy tři slečny se třemi vlastnostmi: dvě z nich mají krásné oči, počítají a nosí šperk a jednu, která vaří, počítá a má krásné oči.

Řešení S-I-1-3

Kosův výtah je lepší, protože snížením parametru umožnil, aby výtah stavěl v každém patře. Tuto vlastnost Verneův výtah nemá.

Důkaz:

Návrh spisovatele J.Verna popíšeme matematicky takto:
Výtah může zastavit v patře, které lze vyjádřit v tomto tvaru

$$6n - 3d, \quad \text{kde} \quad n,\ d \quad \text{jsou} \quad \text{celá} \quad \text{čísla.}$$

Po úpravě dostaneme pouze patra

$$3(2n - d),$$

odkud je vidět, že výtah staví jen v patrech, která jsou násobky čísla 3. Nikdy se tak nedostaneme například do 1. nebo 2. patra.

Obdobně zapíšeme Kosův návrh:

Výtah může zastavit v patře, které lze vyjádřit v tomto tvaru

$$5n - 3d, \quad \text{kde} \quad n, \ d \quad \text{jsou} \quad \text{celá} \quad \text{čísla.}$$

Budeme-li za n a d postupně dosazovat celá čísla, výsledkem by byla celá množina $\mathbb{Z}$. Například první patro bychom získali, když n bude rovno 2 a d bude rovno 3,

$$1 = (5 \cdot 2 - 3 \cdot 3).$$

Pokud se výtahem můžeme dostat o jedno patro vzhůru, můžeme se takto dostat už do kteréhokoli patra, a to opakováním tohoto postupu (ovšem netvrdíme, že je to nejekonomičtější postup). Kosův návrh výtahu tedy opravdu zaručuje,že je možno zastavit v každém patře, které bychom popsali celým číslem. (Odborně bychom řekli, že se Kosovi podařilo vygenerovat grupu celých čísel.)

Řešení S-I-1-4

Abychom mohli určit pravděpodobnost správného umístění předmětů ve správném pořadí, musíme nejdříve zjistit počet všech možných jevů. Nejprve vypočítáme, kolika způsoby lze umístit deset různých předmětů do deseti zásuvek, aniž bychom uvažovali jejich pořadí. Jelikož víme, že zelený předmět patří do třetí zásuvky, stačí nám umístit zbývajících devět předmětů, a to tímto způsobem:

vezmeme-li první předmět, máme pro něj devět volných zásuvek (devět možností), do některé ho tedy dáme. Vezmeme druhý předmět, pro který máme už jen osm možností, kam ho umístit, pro třetí předmět máme sedm možností, $\ldots$, až nám zbude poslední, devátý předmět a jedna zásuvka.

Všechny možnosti jak umístit devět předmětů do devíti zásuvek dostaneme tak, že vynásobíme

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9! \quad \text{(čteme devět faktoriál).}$$

Jedná se o typickou úlohu z kombinatoriky, kdy máme určit permutace 9 prvků bez opakování.

Dále vypočítáme, kolika způsoby lze volit pořadí ukládání předmětů do zásuvek, aniž bychom uvažovali, který předmět patří do které zásuvky. Jelikož víme, že červený předmět má být uložen jako devátý, budeme určovat pořadí zbývajících devíti předmětů. Budeme-li postupovat jako v předešlém výpočtu, obdržíme opět

$$9!$$

možností.

Jelikož máme splnit obě podmínky zároveň, počet všech možných jevů je

$$9! \cdot 9!.$$

Počet příznivých jevů je jedna. A odtud dostáváme pravděpodobnost správného uložení předmětů jako:

$$P = \frac{1}{9! \cdot 9!}.$$

Řešení S-I-1-5

Tvrzení věty

Hraje-li n, $n \in \mathbb{N}$ soupeřících systémem každý s každým tak, že vždy jeden zvítězí a druhý je poražen, lze všechny soupeřící seřadit do řady

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{n-1},\ H_n$$

tak, že hráč H_1 porazil hráče H_2, hráč H_2 porazil hráče H_3 atd. až hráč H_{n-1} porazil hráče H_n.

dokážeme matematickou indukcí. Nechť nejprve $n = 2$, tj. nechť se utkají právě dva soupeři. Potom jeden z nich vyhrál, označme ho H_1, a druhý prohrál, označme ho H_2. Jistě lze tyto hráče seřadit do řady (o dvou členech) tak, že první porazil druhého, totiž do řady

$$H_1,\ H_2.$$

Nechť nyní $n = k$ kde k je libovolné pevně zvolené přirozené číslo, $k > 2$. Předpokládejme, že hraje-li $k-1$ hráčů, lze je seřadit do řady

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{k-2},\ H_{k-1},$$

která splňuje výše uvedenou podmínku. Nechť nyní hráč $k$tý hráč, označme ho H_k, sehraje zápas s každým z $(k-1)$ soupeřů, tak že s každým buď vyhrál a nebo prohrál. Naším úkolem je nyní umístit hráče H_k do řady mezi ostatní hráče. Postupujeme takto. Porazil hráč H_k hráče H_1? Pokud ano, umístíme ho na první pozici v řadě, tedy dostaneme:

$$H_k,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{k-2},\ H_{k-1}.$$

Tato řada splňuje podmínky zadání. Pokud ne, postoupíme k hráči H_2. Ptáme se stejným způsobem. Porazil hráč H_k hráče H_2? Pokud ano, umístíme ho na druhou pozici v řadě, tedy dostaneme:

$$H_1, H_k,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{k-2},\ H_{k-1}.$$

Tato řada opět splňuje podmínky zadání. Pokud ne, postoupíme k dalšímu hráči. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nenajdeme hráče $H_i,\ 1 \leq i \leq k-1$, který s hráčem H_k prohrál. Pokud takového hráče nenajdeme, umístíme ho na poslední místo v řadě. Jelikož počet hráčů je konečný, musí nastat právě jedna z těchto možností. Dostaneme tedy vždy řadu hráčů

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots,\ H_{i-1},\ H_k,\ H_i,\ H_{i+1},\ H_{k-2},\ H_{k-1},$$

v níž hráč na pozici j porazil hráče na pozici $(j+1)$, kde $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Podle principu matematické indukce je tak tvrzení věty dokázáno pro libovolné přirozené číslo n.