Řešení 2. série

Řešení S-I-2-1

Bohatý obchodník by měl první den zaplatit svému známému 0,10 zlatých a každý druhý den dvojnásobek toho, co den předešlý. Tedy

$$0,10;\ 0,20;\ 0,40;\ 0,80;\ 1,60;\ 3,20;\ 6,40,\ \ldots$$

Jeho platby tvoří geometrickou posloupnost a pokud chceme zjistit kolik zaplatí celkem během 28 dní, chceme znát částečný součet naší geometrické řady. Využijme obecného vztahu

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

kde n označuje počet členů v součtu, a_1 vyjadřuje první člen posloupnosti a q je příslušný koeficient udávající poměr dvou sousedních členů posloupnosti.

Dosazením $n = 28$, $a_1 = 0,10$ a $q = 2$ dostáváme

$$s_{28} = 0,10 \frac{2^{28} - 1}{2 - 1} = 26\ 843\ 546.$$

Druhý muž platí po dobu 28 dnů stále stejnou částku a to 500 000 zlatých. Celkem tedy vydá

$$28 \cdot 500000 = 14\ 000\ 000$$

zlatých.

Je zřejmé, že $26\ 843\ 546 > 14\ 000\ 000$ a tedy i to, že je dohoda pro obchodníka nevýhodná.

Řešení S-I-2-2

Než se pustíme do řešení úlohy s n destičkami, zkusme odhalit princip přesouvání s konkrétním počtem destiček. Máme-li jen 1 destičku, stačí nám jediný přesun. Uvažujme 2 destičky. Musíme nejdříve přesunout první, pak druhou a pak znovu první, celkem tedy 3 přesuny. Pokud máme destičky 3, musíme celý postup zopakovat, pak přesunout čtvrtou destičku a pak znovu zopakovat přesun tří destiček, celkem tedy 7 přesunů. Uspořádejme si výsledky do tabulky:

počet destiček	počet přesunů
1	1
2	3
3	$3+1+3=7=2^3-1$
4	$7+1+7=15=2^4-1$
5	$15+1+15=31=2^5-1$

Pokud tedy máme n destiček, Měli bychom provést p_n přesunů:

$$p_n = 2^n - 1.$$

Naši hypotézu nyní dokážeme, přičemž využijeme toho, jak jsme k ní dospěli. Ověřme, že platí tehdy, máme-li jedinou destičku. Pro přesun jedné destičky potřebujeme jediný tah. Zároveň pro $n = 1$ je $2^1 - 1 = 1$. Naše hypotéza je pro jednu destičku splněna.

Předpokládejme dále, že naše hypotéza platí pro k destiček, kde k je libovolné přirozené číslo. Neboli, že $p_k = 2^k - 1$. Máme nyní přesunout o 1 destičku více, neboli chceme zjistit počet přesunů pro $k+1$ destiček p_{k+1}. Chceme-li přesunout $k+1$ destiček, musíme přesunout nejdříve k destiček, pak $(k+1)$. destičku a pak znovu k destiček. Pro p_{k+1} tedy platí

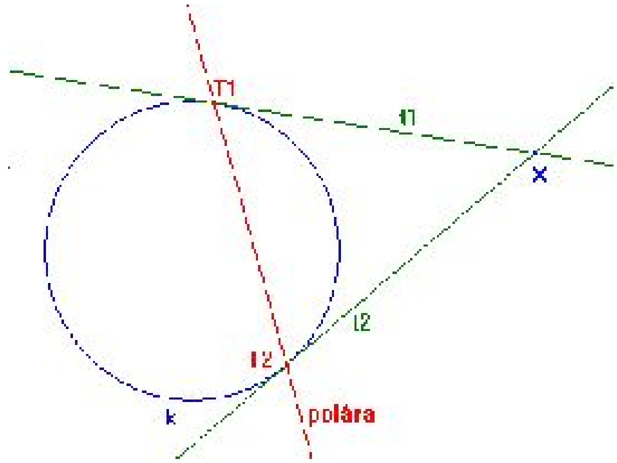
$$p_{k+1} = p_k + 1 + p_k = (2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Vztah tedy platí i pro $k+1$ destiček za předpokladu, že platí pro k destiček. Jelikož platí i pro 1 destičku, platí pro libovolný počet destiček. Tím je naše hypotéza dokázána.

Řešení S-I-2-3

Hledáme tečny k dané kružnici k z daného bodu X, který leží vně kružnice. Střed kružnice k neznáme a ke konstrukci můžeme použít jen pravítko.

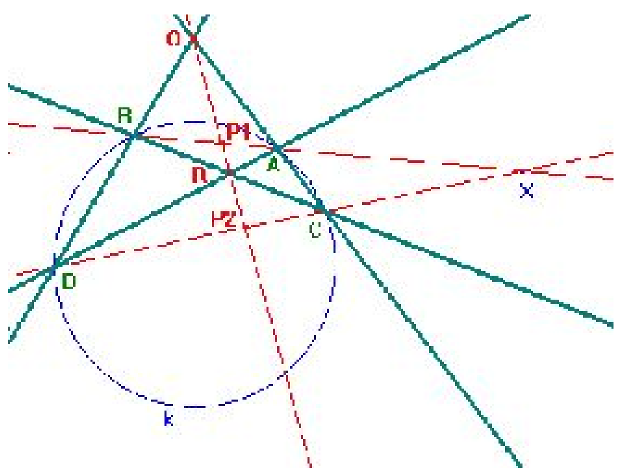
Uvědomme si, že body (T_1, T_2) dotyku kružnice k s hledanými tečnami (t_1 a t_2) jsou zároveň průsečíky **poláry** bodu X vzhledem ke kružnici k s kružnicí k. Naším úkolem tedy je najít poláru, pak už tečny snadno sestrojíme.



Jak sestrojit poláru? K jejímu sestrojení potřebujeme znát alespoň dva její body.

Co víme o poláře a jejích bodech? Pro každý bod P poláry platí, že když vedeme bodem X přímku, která protíná kružnici k ve dvou bodech A a B, pak čtveřice $(XPAB)$ je harmonická. $(XPAB)$ nazýváme dvojpoměr bodů X, P, A, B, který je poměrem dělicích poměrů (XPA) a (XPB). Tento dvojpoměr je harmonický, je-li $(XPAB) = -1$. (Říkáme, že body X, P, A, B tvoří harmonickou čtveřici). Nalezneme-li dvě čtveřice bodů takové, že čtveřice $(XP_1AB) = -1$ a čtveřice $(XP_2AB) = -1$, pak body P_1 a P_2 budou ležet na hledané poláře.

K nalezení těchto harmonických čtveřic bodů využijeme vlastností čtyřstranu.

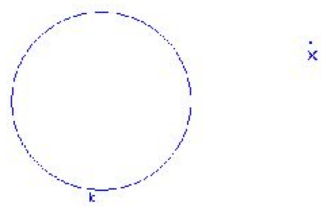


Přímky AB a CD jsou sečny kružnice k vedené bodem X. Podívejme se na body A, B, C, D jako na vrcholy čtyřstranu, který je tvořen čtyřmi přímkami AC, BD, CB a AD. Přímky AB, CD a OR (O je průsečíkem přímek AC a BD, R je průsečíkem přímek AD a CB) jsou diagonály čtyřstranu. Z vlastností čtyřstranu vyplívá, že každou diagonálu zbývající dvě protínají v bodech, které spolu se dvěma vrcholy ležícími na této diagonále tvoří harmonickou čtveřici, tedy $(ORP_1P_2) = -1$, $(XP_1AB) = -1$, $(XP_2CD) = -1$. Harmonické čtveřice (XP_1AB) a (XP_2CD) jsou čtveřice bodů, které jsme hledali. To znamená, že body P_1 a P_2 jsou body, které leží na poláře. Tedy přímka OR je hledanou polárou.

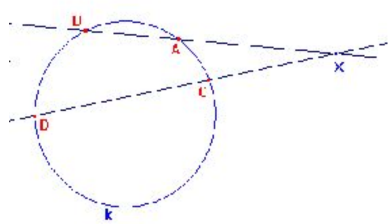
Tečny pak snadno sestrojíme jako přímky procházející bodem X a průsečíkem poláry s kružnicí k.

Už víme, jak hledané tečny sestrojit, pusťme se tedy do konstrukce.

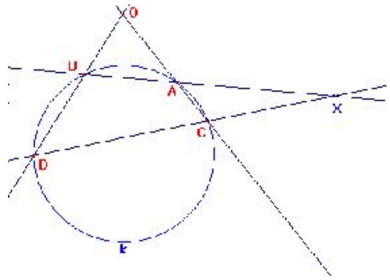
1. Kružnice k a bod X jsou dány.



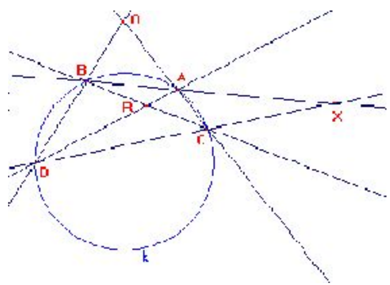
2. Sestrojme dvě sečny kružnice k vedené bodem X. Jejich průsečíky s kružnicí k označme A, B, CaD.



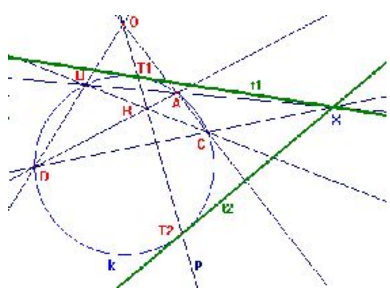
3. Veďme přímky AC a BD. Jejich průsečík označme O.



4. Sestrojme přímky AD a BC. Jejich průsečík označme R.



5. Body O a R veďme přímku. To je hledaná polára. Její průsečíky T_1, T_2 s kružnicí k jsou body dotyku tečen s kružnicí k. Sestrojme tečny t_1, t_2 ke kružnici k z bodu X.

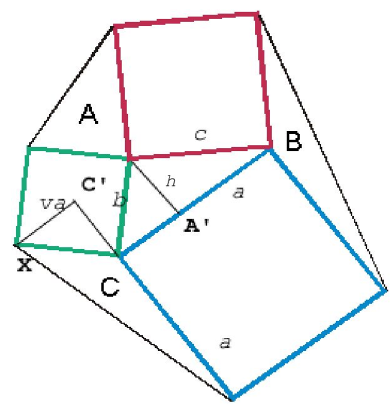


Řešení S-I-2-4

Označme si trojúhelníky nad vrcholy trojúhelníka ABC po řadě $\triangle A,\ \triangle B,\ \triangle C$ a jejich obsahy $S_A,\ S_B,\ S_C$. Naším úkolem je určit vztah mezi $S_A,\ S_B,\ S_C$. Pro obsah $\triangle C$ platí

$$S_C = \frac{av_a}{2},$$

kde a má velikost strany CB a v_a je výška na stranu a v $\triangle A$.



Ukážeme nejprve, že trojúhelníky $CC'X$ a $CA'A$ jsou shodné.

- Strany CX a CA jsou stranami čtverce, tedy

$$|CX| = b = |CA|.$$

- Oba trojúhelníky mají pravý úhel, $\triangle CC'X$ u vrcholu C' a $\triangle CA'A$ u vrcholu A', neboť tyto body jsou patami výšek v $\triangle C$ a v $\triangle ABC$.

- Protože úhly XCA a $A'CC'$ jsou pravé, odečteme-li od obou úhlů úhel $C'CA$, dostáváme po řadě úhly XCC' a ACA'. Neboli pro velikosti úhlů platí

$$|\angle XCC'| = |\angle ACA'|.$$

Odtud již podle věty *usu* dostáváme, že jsou trojúhelníky shodné, což znamená, že

$$v_a = |XC'| = |AA'| = h,$$

kde h je výška $\triangle ABC$ na stranu a. Pro obsah tedy dostáváme

$$S_C = \frac{ah}{2}.$$

A označíme-li S obsah $\triangle ABC$, dostaneme

$$S_C = S.$$

Provedeme-li stejnou úvahu i pro $\triangle A$ a $\triangle B$ dostáváme tyto rovnosti

$$S_A = S$$

a také

$$S_B = S.$$

Odtud již plyne, že

$$S_A = S_B = S_C$$

Neboli, že obsahy všech trojúhelníků si jsou navzájem rovny.

Řešení S-I-2-5

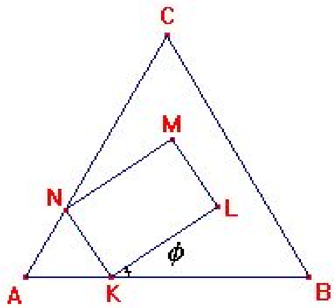
Dříve, než začneme řešit samotnou úlohu, musíme se omluvit všem řešitelům. Do zadání se nám vloudila chyba a v původním znění je úloha neřešitelná. Jedná se o záměnu pojmů obdélník a čtverec. Naštěstí se mnozí z vás nenechali zmást. (Měli jste také možnost opravit si zadání podle www stránek.) V zadání se mluví o tom, že daný čtverec je obdélník s maximálním obsahem, který lze rovnostrannému trojúhelníku vepsat, ačkoli jde o čtverec o maximálním obsahu splňující dané vlastnosti. Úlohu lze přeformulovat i tak, že skutečně budeme hledat obdélník s maximálním obsahem, který bude splňovat dané podmínky. Avšak hledaným obdélníkem bude pak obdélník s poloviční základnou než je strana daného trojúhelníku.

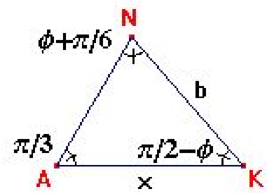
První možné přeformulování úlohy:

Nechť trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte, že čtverec s největším obsahem umístěný do tohoto trojúhelníku je právě vepsaný (tj. všechny čtyři vrcholy leží na některé z jeho stran) čtverec.

Důkaz rozdělíme do dvou částí. Jednak ukážeme, že maximální obsah bude mít čtverec tehdy, bude-li jeho základna ležet na některé z jeho stran. Ve druhé části ukážeme, že maximálního obsahu dosáhneme tehdy, pokud střed základny splyne se středem dané strany trojúhelníku.

Nechť bod K (bez újmy na obecnosti) je libovolným vnitřním bodem úsečky AS, kde S je střed strany AB. Nechť dále strana KL (pevné délky) svírá se stranou AB libovolný úhel φ. Má-li obdélník $KLMN$ náležet trojúhleníku ABC, musí být $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.





Podle sinové věty musí pro stranu b platit

$$b(\varphi) = x\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{6})}.$$

Pro obsah pak dostaneme

$$S(\varphi) = ax\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{6})}.$$

Obsah je tedy funkcí úhlu φ a jeho maximální hodnotu můžeme určit pomocí derivace podle úhlu φ (Hodnoty a a x jsou pro daný případ konstantní).

$$\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} = -ax \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos(\varphi + \frac{\pi}{6})}{\sin^2(\varphi + \frac{\pi}{6})}.$$

Derivace nabývá nulové hodnoty jedině tehdy, je-li

$$\cos(\varphi + \frac{\pi}{6}) = 0.$$

(Poznamenejme, že tyto hodnoty náleží do definičního oboru.) Odtud můžeme dostat hodnoty úhlu φ

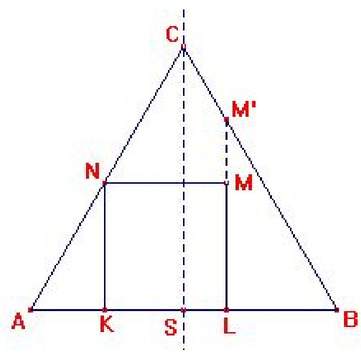
$$\varphi + \frac{\pi}{6} = (2k-1)\frac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné přirozené číslo. Zadání vyhovuje jedině $k = 1$, potom

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

To ale znamená, že úhel naproti straně AK je roven $\frac{\pi}{2}$, neboli strana MN leží na straně AC.

Uvažujme nyní, že strana KL (pevné délky) leží na straně AB a hledejme, kam máme umístit střed strany KL tak, aby byl obsah daného obdélníku maximální. Opět bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod K je vnitřním bodem úsečky AS, kde S je středem strany AB.



Díky symetrii trojúhelníku ABC podle osy CS snadno nahlédneme, že střed strany KL musí splynout se středem S, aby strana KN měla maximální délku. Pro obsah totiž dostaneme

$$S(r) = ab = a\left(\frac{s-a}{2} - r\right)\tan\frac{\pi}{3},$$

kde $a = |KL|$, $b = |KN|$, $s = |AB|$ a r je vzdálenost bodu S od středu strany KL. Je zřejmé, že $0 \le r \le \frac{s-a}{2}$. Funkce $S(r)$ je na tomto intervalu klesající a nabývá tak svého maxima v bodě $r = 0$.

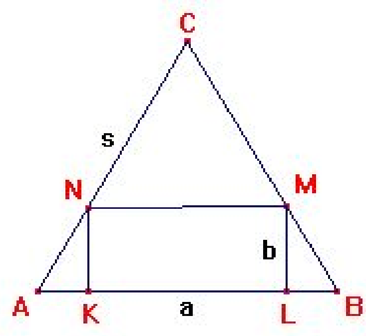
Čtverec s maximálním obsahem bude potom ten, který má stranu maximální délky

$$a = \frac{\sqrt{3}s}{2+\sqrt{3}}.$$

Druhé možné přeformulování úlohy:

Nechť trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte, že obdélník s největším obsahem umístěný do tohoto trojúhelníku je právě vepsaný (tj. všechny čtyři vrcholy leží na některé z jeho stran) obdélník. Určete jeho rozměry.

První dvě části důkazu jsou shodné. Jedině při určování rozměrů hledaného obdélníku musíme postupovat jinak. Vepíšeme-li obdélník do rovnostranného trojúhelníku, je délka jedné jeho strany funkcí délky strany druhé.



Přitom pro ně platí

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{b}{\frac{s-a}{2}},$$

tedy

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}(s-a).$$

Pro obsah pak dostáváme

$$S(a) = ab = \frac{\sqrt{3}}{2}(sa - a^2).$$

Jeho maximální hodnotu dostaneme znovu s využitím derivace podle a.

$$\frac{dS(a)}{da} = \frac{\sqrt{3}}{2}(s-2a)$$

Položením $\frac{dS(a)}{da} = 0$ získáme hledané délky stran obdélníka.

$$a = \frac{s}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{4}s.$$