Řešení 3. série

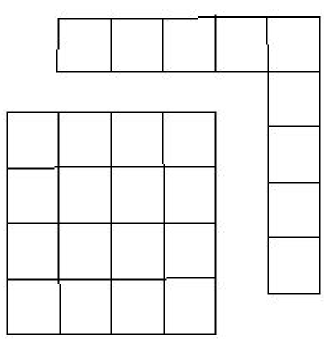
Řešení S-I-3-1

Než se pustíme do řešení úlohy s n x n čtvercovými poli, zkusme odhalit princip na šachovnici s konkrétním počtem polí. Na šachovnici 1 x 1 je pouze 1 čtverec. Na šachovnici 2 x 2 můžeme napočítat 4 čtverce o rozměru 1x1 a 1 o rozměru 2 x 2 - tedy dohromady 5. Na šachovnici 3 x 3 máme 9 čtverců o rozměru 1 x 1, 4 o rozměru 2 x 2 a 1 o rozměru 3 x 3. Nyní si uspořádejme výsledky do tabulky.

n	počet čtverců	hypotéza
1	1	1^2
2	1+4=5	$1^2 + 2^2$
3	1+4+9=14	$1^2 + 2^2 + 3^2$
4	1+4+9+16=30	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
5	1+4+9+16+25=55	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

Hypotézu můžeme tedy sformulovat takto: *Na šachovnici o n x n ($n \in \mathbb{N}$) polích je p_n čtverců, kde $p_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.*

Toto tvrzení musíme dokázat. Poslouží nám k tomu princip matematické indukce. Nejdříve musíme dokázat, že tvrzení platí pro $n = 1$. V šachovnici 1 x 1 je ale právě 1 čtverec, tím je první krok hotov. Předpokládejme, že naše tvrzení platí pro nějaké pevné přirozené číslo k. Kolik přibude čtverců, pokud se počet polí zvýší na $(k+1)$ x $(k+1)$?



typ čtverce	o kolik se zvýší počet
1 x 1	$2k+1$
2 x 2	$2k-1$
3 x 3	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$
k x k	3
$(k+1)$ x $(k+1)$	1

Chceme-li vědět, kolik přibude čtverců, stačí sečíst

$$(2k+1) + (2k-1) + (2k-3) + \cdots + 3 + 1 = (k+1)^2.$$

V šachovnici o $(k+1)$ x $(k+1)$ polích je tedy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

čtverců.

Naše tvrzení je dokázáno pro všechna přirozená čísla n, protože jsem je ověřili pro $n = 1$ a z předpokladu o pravdivosti tvrzení pro $n = k$ jsem dokázali pravdivost pro $n = k + 1$.

Poznámka: Mohli bychom ještě dokázat, že skutečně součet prvních k lichých čísel je k^2, čehož jsem využili ve druhé části důkazu. Také stojí za pozornost zjednodušení výpočtu všech čtverců v šachovnici na tvar

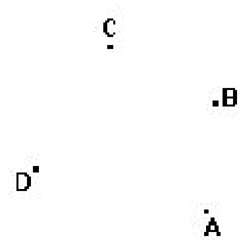
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

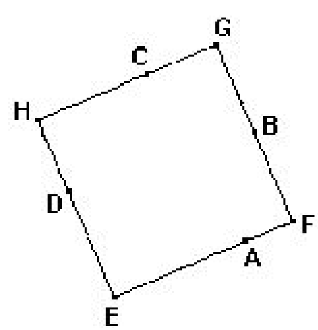
Platnost tohoto vztahu bychom dokázali opět pomocí matematické indukce.

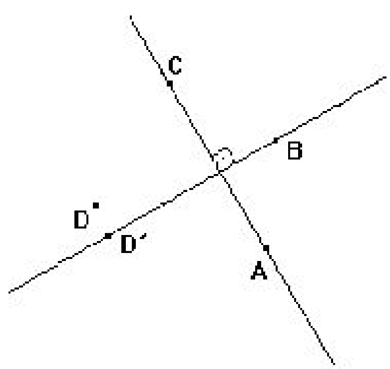
Řešení S-I-3-2

Úlohu převedeme na úlohu sestrojení čtverce, známe-li čtyři body (A, B, C, D) na obvodu čtverce. Z vlastnosti, že shodné příčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, pak plyne konstrukce.

Body A, B, C a D jsou dány. Chceme sestrojit čtverec $EFGH$.

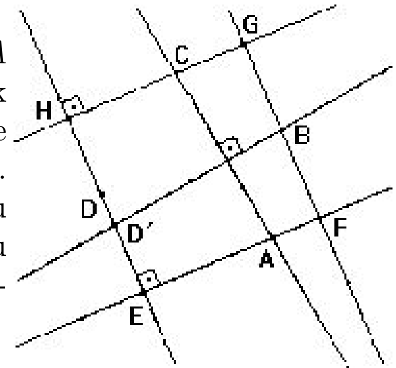






Body A a C vedeme přímku. Sestrojíme kolmici bodem B k této přímce. Velikost úsečky AC naneseme na tuto kolmici a dostaneme tak bod D', který je bodem strany HE.

Body D a D' vedeme přímku. Dále bodem A sestrojíme kolmici na přímku DD'. Průsečík těchto přímek je bod E. Bod H sestrojíme obdobně - kolmicí bodem C na přímku DD'. Nanesením velikosti úsečky EH na přímku EA získáme bod F a nanesením na přímku HC získáme bod G. Tím jsme dokončili konstrukci vrcholů hledaného čtverce $EFGH$.



Řešení S-I-3-3

Mnozí z vás řešili tuto úlohu zkusmo (a správně), proto vám chceme ukázat jistou metodu, která vede k řešení i tehdy, je-li zadání mnohem komplikovanější.

Na pomoc si vezmeme vektory. $x$ová souřadnice bude představovat květák, $y$ová kapustu a $z$ová zelí. S tímto označením si můžeme první tah zapsat jako vektor (1, 0, -1), druhý tah jako (-1, 1, 0), třetí tah jako (0, 1, 0), čtvrtý jako (-1, -1, 1) a pátý jako (0, 0, -2). Stavu na začátku hry přísluší bod [2, 3, 4]. Lineární kombinací všech vektorů se chceme z bodu [2, 3, 4] dostat do bodu [0, 0, 0]. Zapíšeme to následující rovností:

$$[2, 3, 4] + a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(0, 1, 0) + d(-1, -1, 1) + e(0, 0, -2) =$$

$$= [0, 0, 0],$$

kde koeficienty $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ jsou celá nezáporná čísla.

Upravíme:

$$a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(0, 1, 0) + d(-1, -1, 1) + e(0, 0, -2) = (-2, -3, -4)$$

A dostáváme soustavu tří rovnic o pěti neznámých:

$$a - b - d = -2$$

$$b + c - d = -3$$

$$-a + d - 2e = -4$$

Tato soustava má dvouparametrický systém řešení, za parametry zvolíme např. d a e. Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned}
a &= 4 + d - 2e,\\
b &= 6 - 2e,\\
c &= -9 + d + 2e,\\
d &= d,\\
e &= e.
\end{aligned}$$

Víme, že $b \geq 0$, to znemená, že $6 - 2e \geq 0$, tedy $e \geq 3$. Nás zajímá, kdy bude součet

$$a + b + c + d + e = 1 + 3d - e$$

nejmenší.

Pokud bude $e = 3$, bude $c = -3 + d$. Víme, že $c \geq 0$, tedy i $-3 + d \geq 0$, tedy $d \geq 3$. Vidíme, že součet bude nejmenší pro $d = 3$. Dostáváme tedy:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 3,\ e = 3,$$

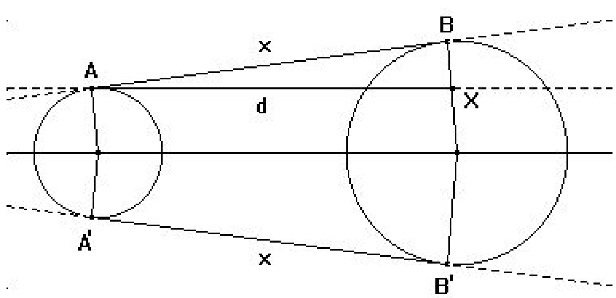
odtud

$$a + b + c + d + e = 1 + 3 \cdot -3 = 7.$$

Nejmenší počet tahů, na který lze hru vyhrát je 7.

Řešení S-I-3-4

V řešení dodržíme značení ze zadání, tedy poloměr většího kola označíme r_1, poloměr menšího kola r_2 a vzdálenost mezi středy d. Řešme nejprve délku řemene v případě, že se obě kola otáčejí ve stejném směru. Celkovou délku O_1 můžeme rozložit na dva oblouky a dvě rovné části x, jak je naznačeno na obrázku.



Přímka AB je tečnou k oběma kružnicím, proto trojúhelník AXB je pravoúhlý. Známe velikosti stran $|AX| = d$ a $|XB| = r_1 - r_2$, proto $x = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$.

Z tohoto trojúhelníku určíme i velikost úhlu $\angle AXB$ jako

$$\cos(|\angle AXB|) = \frac{r_1 - r_2}{d},$$

odtud

$$\cos(\pi - |\angle AXB|) = \frac{r_2 - r_1}{d}.$$

Délka oblouku $\widehat{AA'}$, resp. $\widehat{BB'}$ pak bude

$$|\widehat{AA'}| = 2r_2 \arccos \frac{r_1 - r_2}{d},$$

$$|\widehat{BB'}| = 2r_1 (\arccos \frac{r_2 - r_1}{d}).$$

Tedy celkovou délku O_1 můžeme vyjádřit

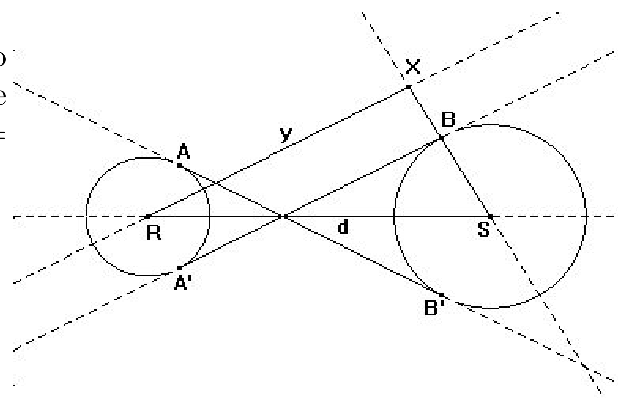
$$O_1 = 2\left(\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + r_1 \arccos \frac{r_2 - r_1}{d} + r_2 \arccos \frac{r_1 - r_2}{d}\right).$$

Stejným způsobem můžeme postupovat i v případě, kdy se kola otáčejí proti sobě.

Využijeme pravoúhlého trojúhelníka RSX, kde platí $|RS| = d$, $|SX| = r_1 + r_2$. Odtud určíme

$$y = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2},$$

$$\cos|\angle RSX| = \frac{r_1 + r_2}{d}.$$



Obdobnými úpravami jako v předcházejícím případě vyjádříme celkovou délku řemene O_2 jako

$$O_2 = 2\left(\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} + r_1 \arccos \frac{-(r_1 + r_2)}{d} + r_2 \arccos \frac{-(r_1 + r_2)}{d}\right).$$

Poměr jejich délek je pak

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} + r_1 \arccos \frac{r_2 - r_1}{d} + r_2 \arccos \frac{r_1 - r_2}{d}}{\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} + r_1 \arccos \frac{-(r_1+r_2)}{d} + r_2 \arccos \frac{-(r_1+r_2)}{d}}.$$

Řešení S-I-3-5

Hledáme takové trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě, které se rovná poslednímu trojčíslí stejného čísla zapsaného v pětkové soustavě.

Obecně pro trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě x_{10} platí:

$$x10^2 + y10^1 + z10^0 = a5^4 + b5^3 + c5^2 + d5^1 + e5^0,$$

kde $x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e$ jsou celá nezáporná čísla a $x \neq 0$.

V pětkové soustavě se užívá jen číslic 0, 1, 2, 3 a 4, proto $x_{10} \leq 444$. Odtud můžeme psát

$$x10^2 + y10 + z = k5^3 + x5^2 + y5 + z,$$

kde $x,\ y,\ z,\ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ x \neq 0$. Snadnými úpravami dostaneme rovnici

$$5(5k - 3x) = y,$$

odkud víme, že $5|y$. Jelikož $y \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, musí být $y = 0$.

Dosazením upravíme rovnici na tvar

$$x = \frac{5}{3}k.$$

Jediné přípustné řešení je $k = 0,\ x = 0$. Hledaná čísla $x,\ y,\ z$ jsou $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ t)$, kde $t \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Můžeme tedy udělat závěr, že neexistuje žádné trojciferné číslo x_{10}, které je zapsáno stejnými číslicemi jako poslední trojčíslí stejného čísla x_5 zapsaného v pětkové soustavě.