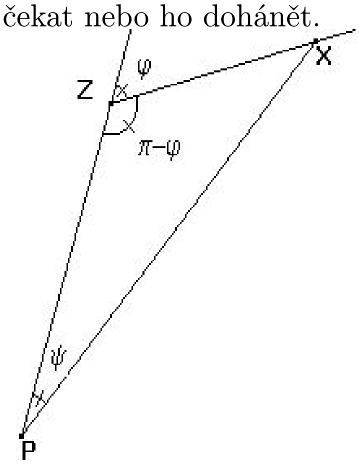
Řešení S-I-4-1

Hledáme vlastně místo, kde se setkají. A to tak, aby nemusel pes na zajíce čekat nebo ho dohánět.



X.....místo setkání
P.....místo, kde vybíhá pes
Z.....místo, kde vybíhá zajíc
$|ZX| = v_z \cdot t$
$|PX| = v_p \cdot t$
V trojúhelníku PXZ užijeme sinovu větu:

$$\frac{v_z \cdot t}{\sin\psi} = \frac{v_p \cdot t}{\sin(180^\circ - \varphi)}$$

Po úpravě dostaneme:

$$sin\psi = \frac{v_z}{v_p} \cdot sin(180^\circ - \varphi) = \frac{v_z}{v_p} \cdot \sin\varphi$$

Hledaný úhel je tedy řešením rovnice

$$\sin\psi = \frac{v_z}{v_p} \cdot \sin\varphi.$$

Tato rovnice má právě jedno řešení, neboť $\psi \in \langle 0,\ \pi)$ a zároveň

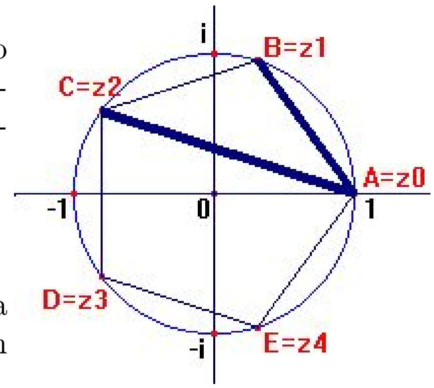
$$0 \le \sin\varphi \le 1, \quad 0 < \frac{v_z}{v_p} < 1,$$

odtud

$$0 \le \frac{v_z}{v_p} \cdot \sin\varphi < 1.$$

Povšimněte si, že velikost úhlu ψ nezáleží na vzdálenosti psa a zajíce d. Kdybychom sestrojili trojúhelník $P'X'Z$, kde vzdálenost bodů $|P'Z| = d' \neq d$, byl by podobný trojúhelníku PXZ.

Řešení S-I-4-2



Mějme pětiúhelník $ABCDE$ s kružnicí opsanou o poloměru 1j. Vrcholy tohoto pětiúhelníka si můžeme znázornit v Gaussově rovině komplexních čísel jako řešení rovnice

$$z^5 - 1 = 0.$$

Označme $A = z_0$, $B = z_1$, $C = z_2$, $D = z_3$ a konečně $E = z_4$, kde z_i, $i = 0, \dots, 4$ jsou řešením této rovnice.

Naším úkolem je dokázat, že platí rovnost

$$(|AB| \cdot |AC|)^2 = 5.$$

Tato rovnost je zřejmě ekvivalentní rovnosti

$$|AB| \cdot |AC| \cdot |AD| \cdot |AE| = 5,$$

neboli

$$|(z_1 - z_0)(z_2 - z_0)(z_3 - z_0)(z_4 - z_0)| = 5.$$

K dalším úpravám využijeme vlastností komplexních čísel z_i, $i = 0, \dots, 4$. Díky tomu, že jde o páté odmocniny z jedné, platí

$$z_i \cdot z_j = z_{i+j \ (mod\ 5)},$$

kde i, $j = 0, \dots, 4$.[1] Z Viètových vzorců dále plyne, že

$$\sum_{i=0}^{5} z_i = 0.$$

Tedy platí:

$$|(z_1 - z_0)(z_2 - z_0)(z_3 - z_0)(z_4 - z_0)| =$$

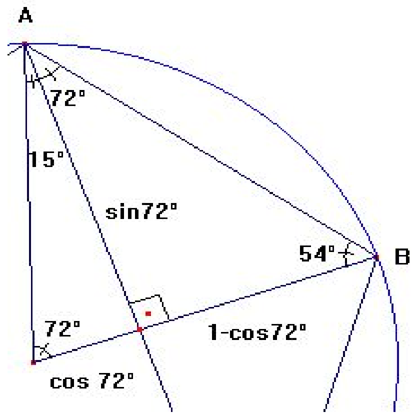
$$= |z_1 z_2 z_3 z_4 - z_0 z_1 z_2 z_3 - z_0 z_1 z_2 z_4 + z_0^2 z_1 z_2 +$$

[1]Pozn. 1: Sčítání (mod 5) se provede tak, že se obě čísla sečtou „normálně“. Zbytek po dělení 5 tohoto výsledku dá součet obou čísel (mod 5).

$$-z_0z_1z_3z_4+z_0^2z_1z_3+z_0^2z_1z_4-z_0^3z_1+$$
$$-z_0z_2z_3z_4+z_0^2z_2z_3+z_0^2z_2z_4-z_0^3z_2+$$
$$+z_0^2z_3z_4-z_0^3z_3-z_0^3z_4+z_0^4|=$$
$$=|4-(z_1+z_2+z_3+z_4)|=$$
$$=|4-(-1)|=5$$

Tím je důkaz proveden.

Pozn. 2: Někteří z vás řešili úlohu s využitím různých úhlů, jak je zachyceno na obrázku.



$$(|AC|\cdot|AB|)^2=(2\sin 72°[\sqrt{2-2\cos 72°}])^2=$$
$$=4\sin^2 72°(2-2\cos 72°)=$$
$$=4(1-\cos^2 72°)2(1-\cos 72°)=$$
$$8(1-\cos 72°)(1+\cos 72°)(1-\cos 72°)=$$
$$=8(1-\cos 72°)^2(1+\cos 72°)=$$
$$=8\cdot 0,625=5$$

Myšlenka důkazu je dobrá, ale nutné výhrady jsou zde proti předposlední rovnosti $8(1-\cos 72°)^2(1+\cos 72°)=8\cdot 0,625$. Zkrátka jde o jakési zaokrouhlování, které je v důkazu nepřípustné.

Pozn. 3: Jedná se o úlohu z Maďarské matematické olympiády z roku 1899.

Řešení S-I-4-3

Označme si po řadě počet zlaťáků, půlzlaťáků, stříbrňáků a grošů písmeny $z,\ p,\ s$ a g. Ze zadání víme, že

$$z=2p,$$

$$z=10g,$$

$$s=3g.$$

Rozměnění jednoho zlaťáku si můžeme vyjádřit rovnicí

$$z = 1 = \frac{1}{2}p + \frac{3}{10}s + \frac{1}{10}g,$$

kde $p,\ s,\ g$ jsou nezáporná celá čísla a $p \leq 2,\ s \leq 3,\ g \leq 10$. Snad bude tato rovnice pro někoho přehlednější v této podobě:

$$10 = 5p + 3s + g$$

Možná řešení si můžeme sestavit do tabulky:

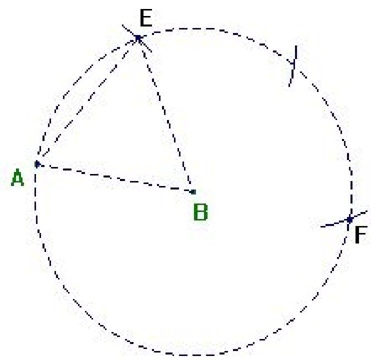
z	p	s	g
1	2	0	0
1	1	1	2
1	1	0	5
1	0	3	1
1	0	2	4
1	0	1	7
1	0	0	10

Vidíme tedy, že existuje právě sedm různých způsobů rozměnění jednoho zlaťáku.

Tento způsob řešení (především sestavení rovnice) je vhodný proto, že nám umožňuje řešit složitější případy, kdy nemáme měnit zlaťák jeden, ale jiné dané množství. Zkuste si jak bude vypadat tabulka pro zlaťáky 2 nebo 3 a pokuste se najít řešení pro obecně n zlaťáků.

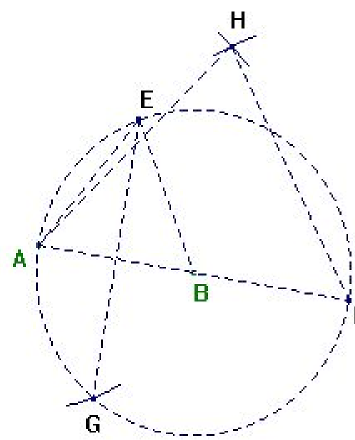
Řešení S-I-4-4

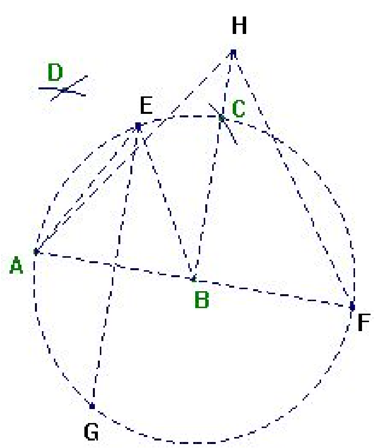
V této úloze máme sestrojit čtverec pouze pomocí kružítka, známe-li jeho dva sousední vrcholy. Označme je A a B a hledejme zbývající vrcholy C a D čtverce $ABCD$.



Sestrojíme body E a F. Bod E je vrcholem rovnostranného trojúhelníka ABE. Bod F sestrojíme tak, že z bodu B opíšeme poloměrem AB kružnici a na ní najdeme bod souměrný k bodu A podle středu B (protože F je protější vrchol vepsaného pravidelného šestiúhelníka, sestrojíme bod F tak, že z bodu A naneseme po kružnici postupně třikrát její poloměr).

Sestrojíme body G a H. Bod G je souměrný k bodu E podle přímky AB. Bod H je vrchol rovnoramenného trojúhelníka AFH, jehož ramena AH a FH mají stejnou délku jako úsečka EG.





Sestrojíme body C a D, které jsou vrcholy hledaného čtverce $ABCD$. Je zřejmé, že

$$|BH|^2 = |AH|^2 - |AB|^2 = |EG|^2 - |AB|^2 =$$

$$= 4(|AE|^2 - (|AB|/2)^2) - |AB|^2 =$$
$$= 4(|AB|^2 - (|AB|/2)^2) - |AB|^2 =$$
$$= 3|AB|^2 - |AB|^2 = 2|AB|^2.$$

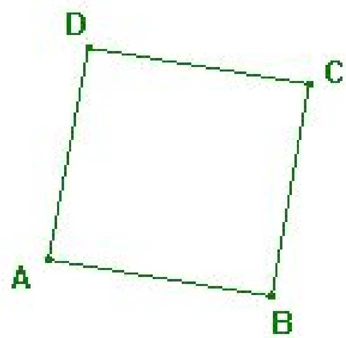
Tedy

$$|BH|^2 = 2|AB|^2$$

čili

$$|BH| = \sqrt{2}|AB|.$$

Víme, že $\sqrt{2}|AB|$ je velikost přepony čtverce o straně AB. To znamená, že výška $|BH|$ trojúhelníka AFH je rovna úhlopříčce čtverce $ABCD$. Známe-li délku strany čtverce a jeho úhlopříčky, snadno vrcholy C a D najdeme.



Řešení S-I-4-5

Nejprve si uvědomme, že

$$\sqrt{republika} = eeuui$$

neboli

$$\underbrace{republika}_{9-\text{místné}} = \underbrace{(eeuui)}_{5-\text{místné}}^2.$$

Pokud má po umocnění 5-místného čísla vyjít číslo devítimístné, a pokud jsou zároveň 2 nejvyšší číslice v tomto čísle stejné, musí toto číslo začínat číslicí 1 nebo 2. Pokud ale vezmeme jakékoli číslo, které bude začínat právě dvěma jedničkami $11uui$, a umocníme ho, vyjde číslo, jenž bude mít na nejvyšším místě číslici 1

$$(11uui)^2 = 1********.$$

To ale neodpovídá zadání, že $e \neq r$. Proto $e = 2$.

Po umocnění jakéhokoli čísla $22uui$ vyjde nejméně číslo $48*******$ a nejvýše $52*******$. Odtud je $r = 4$ nebo $r = 5$. Protože navíc $e = 2$, musí být $r = 5$.

Vezmu-li číslo $2277i$, nikdy po umocnění nedosáhnu požadovaného čísla $52*******$. Proto zbývá promyslet čísla $2288i$ a $2299i$, tj $u = 8$ nebo $u = 9$. Uvažujme nejprve, že $u = 9$. Potom

$$(2299i)^2 = 5289*****.$$

Dostáváme, že $p = 8$.Avšak k tomu potřebujeme, aby $i = 8$. (Jinak bychom nezískali u devítimístného čísla na čtvrté nejvyšší pozici číslici 9.)

Tedy $u = 8$. Odtud

$$(2288i)^2 = 5238*****,$$

neboli $p = 3$

Aby byla čtvrtá nejvyšší číslice v čísle $republika$ rovna 8, musí být $i = 8$, nebo $i = 7$. Jelikož ale už víme, že $u = 8$, připadá v úvahu pouze $i = 7$.

Číslo $republika$ je tedy

$$republika = 523814769$$

a jeho odmocnina

$$eeuui = 22887.$$