Matematický
Korespondenční
Seminář
Severák

Řešení 5. série kategorie Student

Řešení S-I-5-1

Aby byl daný trojúhelník (ozn. trojúhelník A) pravoúhlý, musí podle rozšířené Pythagorovy věty (pravidelné 9-úhelníky jsou podobné obrazce) platit, že obsah třetího pravidelného 9-úhelníku je buď $(30+21)\ \text{cm}^2 = 51\ \text{cm}^2$ nebo $(30-21)\ \text{cm}^2 = 9\ \text{cm}^2$. Musíme tedy spočítat obsah třetího 9-úhelníku.

Pro výpočet obsahu pravidelného n-úhelníku platí vzorec

$$S_n = \frac{nra}{2},$$

kde a je délka strany pravidelného n-úhelníku a r je poloměr kružnice vepsané tomuto pravidelnému n-úhelníku. Tedy obsah třetího pravidelného 9-úhelníku z našeho příkladu je

$$S_9 = \frac{9 \cdot 2,5a}{2}\ \text{cm}^2.$$

Můžeme si všimnout, že $S_9 = 9S_\triangle$, kde $S_\triangle$ je obsah jednoho z devíti shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž se pravidelný 9-úhelník skládá. Nemohli bychom toho nějak využít?

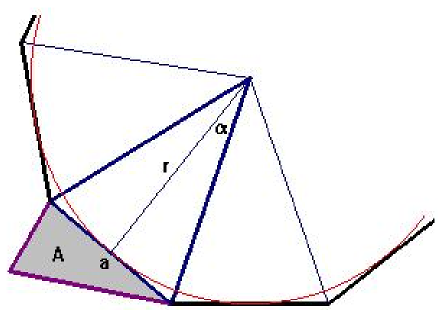
Nad každou stranou trojúhelníku A je sestrojen pravidelný 9-úhelník a tedy i rovnoramenný trojúhelník. Tyto tři rovnoramenné trojúhelníky jsou jistě podobné (mají shodné vnitřní úhly). A to je právě ono - rozšířenou Pythagorovu větu můžeme využít na tyto tři trojúhelníky (nemusíme počítat s 9-úhelníky).

Víme, že obsah rovnoramenného trojúhelníku sestrojeného nad jednou stranou trojúhelníku A je $\frac{30}{9}\ \text{cm}^2$ a nad druhou stranou $\frac{21}{9}\ \text{cm}^2$. Stačí spočítat obsah rovnoramenného trojúhelníku nad třetí stranou a zjistit, zda rozšířená Pythagorova věta platí. Jedinou neznámou pro výpočet obsahu tohoto trojúhelníku je strana a.

Máme tedy spočítat délku základny rovnoramenného trojúhelníku, pro nějž známe délku jeho výšky ($r = 2,5$ cm) a snadno zjistíme i úhel, který svírá výška trojúhelníku s ramenem trojúhelníku. Ten je

$$\frac{\frac{360^\circ}{9}}{2} = 20^\circ$$

(na obrázku to je úhel α). Teď již snadno spočítáme délku základny a.



Využijeme goniometrickou funkci tangens:

$$\tan 20^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{2,5}$$

a po úpravě dostaneme

$$\frac{a}{2} = 2,5 \cdot \tan 20^\circ.$$

Takže obsah rovnoramenného trojúhelníku nad třetí stranou trojúhelníku A je

$$S_\triangle = 2,5 \cdot 2,5 \cdot \tan 20^\circ \text{ cm}^2 = 6,25 \cdot \tan 20^\circ \text{ cm}^2,$$

což není ani $\frac{51}{9}$ cm^2 ani $\frac{9}{9}$ cm^2.

Závěr: Trojúhelník není pravoúhlý.

Ke stejnému závěru samozřejmě dospějeme i tak, že budeme počítat s celými 9-úhelníky, jak jsme původně zamýšleli. Stejným způsobem, jako v předchozím postupu zjistíme, že $\frac{a}{2} = 2,5 \cdot tan 20^\circ$ cm a dosadíme do vzorce pro obsah pravidelného 9-úhelníku. Tedy $S_9 = 56,25 \cdot \tan 20^\circ$ cm^2, což není ani 51 cm^2 ani 9 cm^2.

Závěr: Trojúhelník není pravoúhlý.

Řešení S-I-5-2

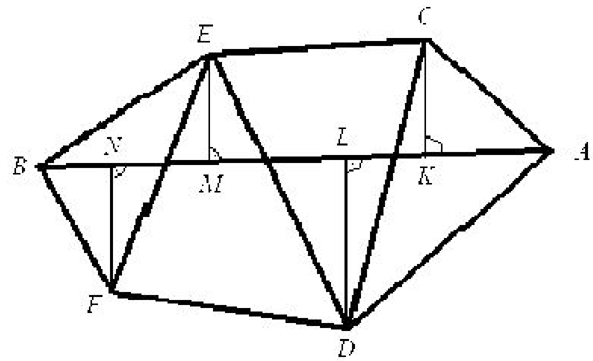
V zadání úlohy chyběl obrázek a navíc došlo k tiskové chybě, takže úloha neměla řešení. Opravili jsme chybné údaje a dodali obrázek, aby jste alespoň v řešení úlohy získali představu, o čem měla být.

Opravné zadání:

Na konci předminulého století působil na jednom reálném gymnáziu středoškolský profesor Kaňousek, který studoval s mým prabratrancem Karlem Severským, výborným matematikem. Profesor Kaňousek si často stěžoval, že jeho studenti neumí to či ono, a požádal mého bratrance o radu. Výsledkem byla zajímavá cvičebnice. Z ní je i následující úloha:

Vypočítejte vzdálenost mezi body A, B bez toho aniž jednotlivé vzdálenosti stran změříte, znáte-li délku strany $|AD| = 4$cm a velikosti úhlů:

$$
\begin{aligned}
|\angle BAD| &= 44^\circ\\
|\angle ADC| &= 30^\circ\\
|\angle BAC| &= 50^\circ\\
|\angle CDE| &= 39^\circ\\
|\angle CED| &= 68^\circ\\
|\angle DEF| &= 45^\circ\\
|\angle EDF| &= 57^\circ\\
|\angle BEF| &= 35^\circ
\end{aligned}
$$



Řešení:

V následujících uvahách budeme používat jednak údajů o velikostech úhlů ze zadání, jednak velikosti, které lze určit z nějakého trojúhelníku, aniž bychom uváděli její výpočet.

Označme průsečík úseček AB a ED jako X. Potom délka úsečky AB je součet délek úseček AX a XB. Trojúhelník XDA je rovnoramenný se základnou XD. Proto $|AX| = |AD|$. Pomocí sinovy věty určíme velikost strany CD v $\triangle ACD$:

$$\frac{|CD|}{\sin 94^\circ} = \frac{|AD|}{\sin 56^\circ},$$

odtud

$$|CD| = \frac{|AD| \sin 94^\circ}{\sin 56^\circ}.$$

Z $\triangle EDC$ určíme velikost strany DE:

$$\frac{|DE|}{\sin 73^\circ} = \frac{|CD|}{\sin 68^\circ},$$

tedy

$$|DE| = \frac{|CD| \sin 73^\circ}{\sin 68^\circ},$$

neboli

$$|DE| = \frac{|AD| \sin 94^\circ \cdot \sin 73^\circ}{\sin 56^\circ \cdot \sin 68^\circ}.$$

Z $\triangle XDA$ vypočítáme velikost strany XD:

$$\frac{|XD|}{\sin 44^\circ} = \frac{|AD|}{\sin 69^\circ},$$

$$|XD| = \frac{|AD| \sin 44^\circ}{\sin 69^\circ}.$$

Potom

$$|EX| = |ED| - |XD| = |AD| \left(\frac{\sin 94^\circ \cdot \sin 73^\circ}{\sin 56^\circ \cdot \sin 68^\circ} - \frac{\sin 44^\circ}{\sin 69^\circ} \right).$$

A nakonec z $\triangle BXE$ určíme velikost úsečky BX:

$$\frac{|BX|}{\sin 80^\circ} = \frac{|EX|}{\sin 31^\circ},$$

odtud

$$|BX| = \frac{|EX| \sin 80^\circ}{\sin 31^\circ},$$

neboli

$$|BX| = \frac{|AD| \sin 80^\circ}{\sin 31^\circ} \left(\frac{\sin 94^\circ \cdot \sin 73^\circ}{\sin 56^\circ \cdot \sin 68^\circ} - \frac{\sin 44^\circ}{\sin 69^\circ} \right).$$

Pro délku úsečky AB tedy platí

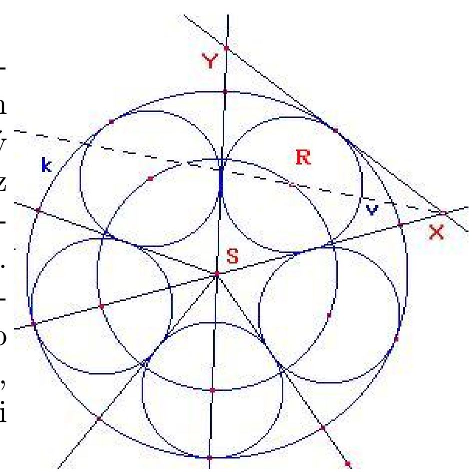
$$|AB| = |AX| + |XB| = |AD| \left[1 + \frac{\sin 80^\circ}{\sin 31^\circ} \left(\frac{\sin 94^\circ \cdot \sin 73^\circ}{\sin 56^\circ \cdot \sin 68^\circ} - \frac{\sin 44^\circ}{\sin 69^\circ} \right) \right],$$

tedy

$$|AB| \doteq 7,80 \text{ cm}.$$

Řešení S-I-5-3

Většina z vás začala dobře. Rozdělila si danou kružnici k na pět stejných výsečí s úhlem 72°. Tak jsme mohli zkonstruovat pravidelný pětiúhelník, který je kružnici k opsán (viz obr.) Tento pětiúhelník je tvořen pěti shodnými trojúhelníky, jedním z nich je $\triangle SXY$. Hledané kružnice bazénků jsou kružnice vepsané těmto trojúhelníkům. Pro $\triangle SXY$ je to kružnice v. Najdemeli jednu tuto kružnici v, středy zbývajících leží na pomocné kružnici se středem S a poloměrem $|SR|$.



Nyní určíme poloměr bazénku. Označme střed úsečky XY (bod dotyku kružnice) písmenem T. Poloměr, který hledáme, je pak $r = |RT|$. Ze zadání víme poloměr celé kašny $R = |ST| = 5$ cm. Z pravoúhlého trojúhelníku STX je

$$\tan 36^\circ = \frac{|TX|}{R},$$
$$|TX| = R \tan 36^\circ.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku RXT je

$$\tan 27^\circ = \frac{r}{|TX|}.$$

Proto

$$r = R \tan 36^\circ \cdot \tan 27^\circ,$$
$$r \doteq 1,85 \text{ cm}.$$

Řešení S-I-5-4

První z běžců Kosovi štafety běží 10 m (5 m tam a 5 m zpět). Každý další běží o 10 m dále. Délky jednotlivých tratí tvoří tedy aritmetickou posloupnost, kde první člen je $a_1 = 10$ a diference je $d = 10$. Protože běží 25 běžců a každý běží právě dvakrát, celkově počítáme s 50ti členy posloupnosti. Celkově tedy v celé štafetě uběhnou

$$S_50 = \frac{50(500 + 10)}{2} \text{ m} = 25 \cdot 510 \text{ m}.$$

To je jistě víc než v klasické štafetě, neboť její délka je $25 \cdot 500$ m.

Při rozložení jednotlivých dílů využijeme stejné myšlenky, jako pro odvození vzorce pro součet aritmetické řady. Aby každý závodník běžel stejnou část štafety, musí být jejich pořadí následující:

1. závodník	1. a 50. část štafety	10 m + 500 m = 510 m
2. závodník	2. a 49. část štafety	20 m + 490 m = 510 m
⋮	⋮	⋮
25. závodník	25. a 26. část štafety	250 m + 260 m = 510 m

Řešení S-I-5-5

Nejprve si zavedeme substituci $y = 2x$, která nám zjednoduší uvažování.

Najděme nejprve taková y, že $\frac{y+5}{3}$ je celé číslo. To je ekvivalentní s

$$y = 3k + 1,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. To splňují prvky množiny K:

$$K = \{\dots,\ -2,\ 1,\ 4,\ \dots\}.$$

Dále má být y takové, že $\frac{y+3}{5}$ je celé číslo. To je ekvivalentní s

$$y = 5l + 2,$$

kde $l \in \mathbb{Z}$. To splňují prvky množiny L:

$$L = \{\dots,\ -3,\ 2,\ 7,\ \dots\}.$$

Společným průnikem těchto množin je

$$K \cap L = \{\dots,\ -8,\ 7,\ 22,\ \dots\}.$$

A nakonec má být y takové, že $\frac{y+3}{7}$ je celé číslo. To je ekvivalentní s

$$y = 7m + 4,$$

kde $m \in \mathbb{Z}$. To splňují prvky množiny M:

$$M = \{\dots,\ -3,\ 4,\ 11,\ \dots\}.$$

Průnikem těchto tří množin je

$$K \cap L \cap M = \{\dots,\ -38,\ 67,\ 172,\ \dots\}.$$

Rozdíl libovolných dvou prvků této množiny je násobkem čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Jestliže $y \in K \cap L \cap M$, potom

$$x \in \{\dots,\ -19,\ \frac{67}{2},\ 86,\ \dots\}.$$

Rozdíl libovolných dvou prvků této množiny je násobkem čísla $\frac{105}{2}$.