Řešení S-II-1-1

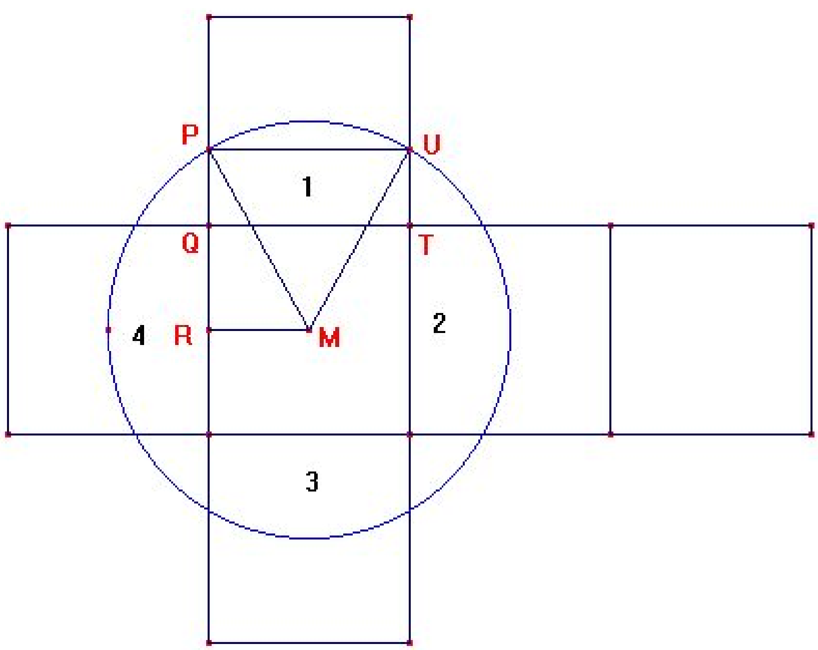
Obsah původního trojúhelníku, látky, kterou jsme dostali od zákazníka, vypočítáme pomocí Heronova vzorce $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c označují délky stran trojúhelníku a s polovinu obvodu trojúhelníku $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tedy $S = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = 10\sqrt{2}$. Obsah rovnostranného trojúhelníku, praporu, který má babička ušít, lze vypočítat podle vzorce $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, kde a je délka strany rovnostranného trojúhelníku. Obsahy obou trojúhelníků se musí rovnat, dostáváme tedy rovnici:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 10\sqrt{2},$$

jejím vyřešením dostáváme hledanou délku strany rovnostranného trojúhelníku (praporu) $a = \sqrt{\frac{40\sqrt{6}}{3}}$.

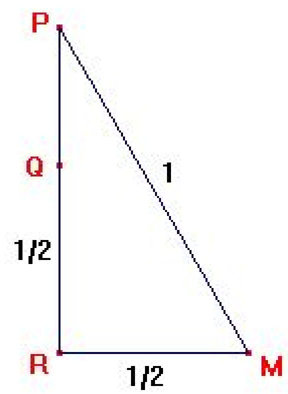
Řešení S-II-1-2

Nejprve si uvědomme, že mravenec za dobu 1 minuty dojde do maximální vzdálenosti 1 metr. Abychom lépe zjistili, kam může mravenec dojít znázorníme si síť krychle a všechna místa, kam mohl dojít, kdyby lezl po rovině, jedná se o kruh s poloměrem 1 a se středem ve středu jedné stěny. Všechna místa, kam mohl mravenec dojít po krychli, jsou průnikem výše zmíněných útvarů (tj. sítě krychle a kruhu) viz obr. 1.



obr. 1

Z obrázku je patrné, že všechna místa kam mohl mravenec dojít, tvoří obrazec, který vznikne sjednocením čtverce s délkou strany 1 se 4 shodnými částmi označených na obrázku 1, 2, 3, 4. Každá část vznikne sjednocením obdélníku (např. PQTU) a kruhové úseče kruhu se sečnou (např. PU). Délku strany PQ určíme z pravoúhlého trojúhelníku MPR viz obr. 2.



obr. 2

Délka přepony MP je 1, bod P leží na obvodu kruhu. Délka kratší odvěsny MR je $\frac{1}{2}$, je rovna půlce délky hrany krychle. Tedy délka delší z odvěsen PR je $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Délka PQ je tedy $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$. Trojúhelník PMU je rovnostranný (velikosti všech stran jsou rovny 1), úhel PMU má tedy velikost $\frac{\pi}{3}$. Obsah čtverce je $S_1=1^2=1$. Obsah obdélníku $S_2=|PQ|\cdot|QT|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a obsah kruhové úseče spočítáme ze vzorce $S_3=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$, kde r je poloměr kruhu a α velikost úhlu vytínající kruhovou úseč.

$$S_3=\frac{1^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}$$

Obsah části povrchu krychle, kam mohl mravenec dojít, je roven obsahu čtverce plus obsah 4 obdélníků plus obsah 4 kruhových úsečí.

$$S=1+4\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+4\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-1.$$

Řešení S-II-1-3

Aby mělo smysl danou nerovnici řešit musí platit $2x+1>0$, tedy $x>-\frac{1}{2}$. Funkce logaritmus je definovaná pouze pro kladná reálná čísla a exponenciální funkce musí mít jako základ také pouze kladná reálná čísla.

Logaritmická funkce o základu větším než 1 je funkcí rostoucí na celém svém definičním oboru. Provedeme tedy ekvivalentní úpravu pokud celou rovnici zlogaritmujeme o základu 10. Dostáváme

$$\log(2x+1)^{\log(2x+1)-3}\leq\log 0,01.$$

Po dalších jednoduchých úpravách dostáváme

$$\log^2(2x+1) - 3\log(2x+1) \leq \log 10^{-2}.$$

Zavedeme-li substituci $y = 2x + 1$ a převedeme-li všechny nenulové členy na jednu stranu dostáváme nerovnici

$$y^2 - 3y + 2 \leq 0.$$

Jejím Řešením jsou všechna y, pro která platí $1 \leq y \leq 2$. Po dosazení za y a odlogaritmování

$$10^1 \leq 2x + 1 \leq 10^2$$

a po jednoduché úpravě dostáváme, že řešením dané nerovnice je množina všech x, pro která platí

$$\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{99}{2},$$

nebo vyhovují podmínce $x > -\frac{1}{2}$.

Řešení S-II-1-4

Pokud budeme uvažovat počet lodí, které se ve stejnou dobu ocitnou na stejném místě v době od 12 hodin dne, kdy parník vyplul z Le Havru (např. soboty), do dne, kdy připlul do New Yorku, tj. do 12 hodin dne, který bude za týden (dal í soboty). Pak bude jejich počet roven 15. Protože první loď potká parník v sobotu ve 12 hodin, další v sobotu ve 24 hodin, další v neděli ve 12 hodin, každý další po 12 hodinách a poslední loď potká v sobotu ve 12 hodin v New Yorku. Počet lodí, které parník potká, je tedy $7 \cdot 2 + 1 = 15$. Pokud budeme uvažovat pouze ty lodě, které parník potká na moři, bude jich o 2 méně, o ty, se kterými bude na stejném místě ve stejnou dobu v přístavech, tedy 13.

Řešení S-II-1-5

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu prvočísel v prvočíselném rozkladu.

Pro $n = 1$ je $d(1) = (1)$ a evidentně platí $(1)^2 = 1^3$. Nechť n je prvočíslo, potom $d(n) = (1, 2)$. Prvočíslo je dělitelné pouze 1 a samo sebou a 1 je dělitelná pouze jedním číslem a prvočíslo dvěmi čísly. Navíc platí

$$(1+2)^2 = 1^3 + 2^3.$$

Předpokládejme, že číslo n má v prvočíselném rozkladu l prvočísel, lze tedy napsat ve tvaru $n = p_1.p_2 \ldots p_{l-1}.p_l$, kde p_i jsou navzájem různá prvočísla. Dále předpokládejme, že má k dělitelů $d(n) = (d_1, d_2, \ldots, d_k)$ a platí

$$(d_1 + d_2 + \cdots + d_k)^2 = d_1^3 + d_2^3 + \cdots + d_k^3.$$

Vezměme číslo m, které lze napsat ve tvaru $m = p_1.p_2 \ldots p_l.p_{l+1}$, kde p_i jsou navzájem různá prvočísla. Potom $d(m) = (d_1, d_2, \ldots, d_k, 2d_1, 2d_2, \ldots, 2d_k)$, protože má stejné dělitele jako číslo $p_1.p_2 \dots p_l$ a navíc má dělitele ve tvaru $p_{l+1}.i$, kde i označuje i-tého dělitele a číslo $p_{l+1}.i$ má $2d_i$ dělitelů. všechny dělitele čísla i a čísla $p_{l+1}\times$ libovolný dělitel čísla i. Dále platí

$$(d_1 + d_2 + \dots + d_k + 2d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_k)^2 =$$

$$(3d_1 + 3d_2 + \dots + 3d_k)^2 = 3^2(d_1 + d_2 + \dots + d_k)^2,$$

což se podle indukčního předpokladu rovná

$$9(d_1^3 + d_2^3 + \dots + d_k^3) = d_1^3 + d_2^3 + \dots + d_k^3 + 8d_1^3 + 8d_2^3 + \dots + 8d_k^3 =$$

$$d_1^3 + d_2^3 + \dots + d_k^3 + (2d_1)^3 + (2d_2)^3 + \dots + (2d_k)^3.$$

Dokázali jsme s využitím indukčního předpokladu platnost vztahu i pro číslo m.

Podle věty o matematické indukci platí vztah, který jsme měli dokázat pro všechna čísla, jejichž prvočíselný rozklad obsahuje pouze první mocniny prvočísel.