Řešení 2. série kategorie STUDENT S-II-2

Řešení S-II-2-1

Daná úloha má několik řešení. V autorském řešení úlohy uvedu dva možné způsoby řešení. Podle mého názoru budou ještě další možné způsoby, jak uspořádat kostky. Jeden z možných způsobů je rozebrán podrobně a postup v druhém případě bude jen nastíněn. Dá se předpokládat, že způsoby řešení budou podobné.

Při pohledu na kostky v zadání úlohy zjistíme, že kostky s číslem 34 jsou jen dvě. To znamená, že by tyto kostky mohly být vedle sebe. S tímto předpokladem budeme pracovat nejdříve a pokusíme se ho rozvést k potřebnému výsledku.

Když čísla na kostkách 3, 34 a 5, 34 sečteme, vyjde nám číslo 76. Tomuto číslu se z uváděných možností nejvíce přibližuje číslo 89. Pokusíme se vhodnými kombinacemi kostek dojít k tomuto číslu. Jednou z možností, jak budou tyto dvě kostky uspořádány vedle sebe, je taková, že kostka číslo 3, 34 bude první řadě. To bude vypadat následovně: 3, 34 a 34, 5 a podle podmínky v zadání musí následovat kostka začínající číslem 5. Z nabízených možností to může být 5, 1; 5, 2 nebo 5, 3. Ostatní kostky s pětkou to být nemohou, protože celková hodnota by přesahovala požadovanou hodnotu 89.

Nejdříve vezmeme řadu kostek: 3, 34; 34, 5; 5, 1. Hodnota těchto kostek je 82. K požadované hodnotě nám chybí 7. Protože posledním kostkou v řadě je 5, 1, musela by následovat kostka 1, 6 a tu nemáme k dispozici. Tuto možnost můžeme tedy vyloučit.

Další uvažovanou kostkou je 5, 2. Hodnota řady kostek 3, 34; 34, 5; 5, 2 je 83. Do 89 zbývá 6, ale kostku 2, 4, která by musela následovat nemáme v nabídce. I tuto možnost tedy vyloučíme. Ke stejnému závěru dospějeme i s kostkou 5, 3.

Nyní se pokusíme původní dvě kostky umístit jiným způsobem. Ten způsob je: 5, 34; 34, 3. Dále může tedy následovat kostka 3, 1; 3, 2; 3, 5 nebo 3, 8. Opět začneme zkoušet přiřazovat kostku a zjišťovat, jestli se jejich součet nerovná číslu 89. Řada 5, 34; 34, 3; 3, 1 dává součet 80. Do 89 chybí 9 a to by z vhodných kombinací začínající číslem 1 odpovídalo na kostku 1, 8. Řada 5, 34; 34, 3; 3, 1; 1, 8 je tou hledanou řadou.

V nabídce máme i jednu kostku s číslem 55. Je to nejvyšší možné nabízené číslo. Použijeme ho tedy ve skládání součtu 144. Protože se toto číslo vyskytuje jenom jednou, je jasné, že bude umístěno na kraji řady. Hodnota této kostky je 60. Postupným vhodným dosazováním jednotlivých nabízených kostek (postup jako v předešlém případě) dostaneme hodnotu řady 144. Ta řada vypadá následovně: 55, 5; 5, 3; 3, 8; 8, 13; 13, 2; 2, 3; 3, 21.

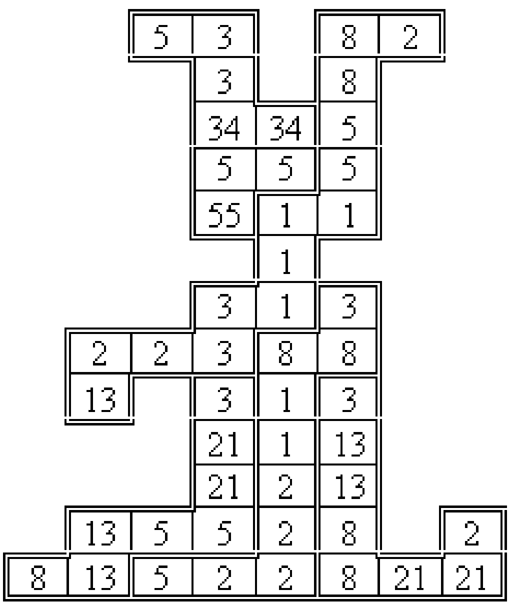
Do tohoto okamžiku jsme vyčerpali řadu sedmi a čtyř kostek o součtech 144 a 89. Zbývají nám tedy 2 řady po čtyřech kostkách a jedna řada po pěti kostkách. Zbývají nám hodnoty 34; 55; 89. Předpokládejme, že na nejnižší hodnotu budeme potřebovat nejnižší kostky. Vezmeme tedy kostky 1, 1; 1, 2 a 1, 5. Jejich součet je 11. Do 34 zbývá 23, čemuž odpovídá kostka 2, 21. Nyní už kostky jen vhodně uspořádáme na řadu: 5, 1; 1, 1; 1, 2; 2, 21.

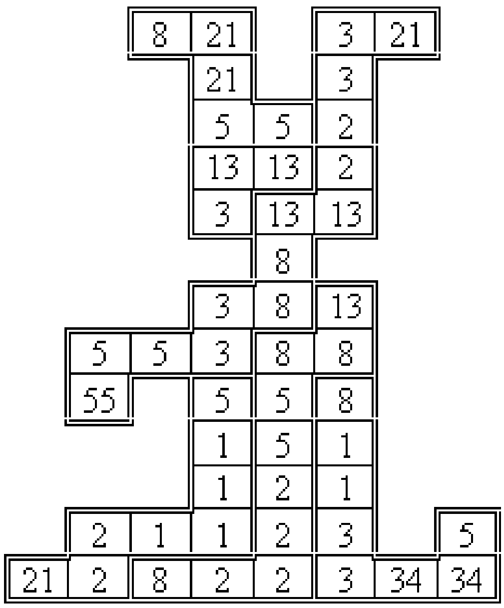
Mezi zbývajícími kostkami se nachází dvě s číslem 21. Jsou to kostky 3, 21 a 8, 21. Hodnota této řady je 55. My ovšem potřebujeme řadu po pěti nebo po čtyřech kostkách.

Proto budeme pokračovat v kombinaci kostek. Je tedy jasné, že tyto kostky vedle sebe použijeme na hodnotu 89. Rozdíl těchto dvou hodnot (89 - 55 = 34) musíme rozdělit do dvou nebo tří kostek. Z volných kostek se nám nabízí dvojice kostek 3, 13 a 5, 13. I z těchto kostek lze snadno vytvořit odpovídající dvojici. Navíc se nám hodí i k předešlé dvojici kostek. Kombinací kostek vytvoříme tedy řadu 8, 21; 21, 5; 5, 13; 13, 3.

Závěrem musíme ze zbylých pěti kostek uspořádat řadu. Ta by měla vypadat následovně: 8, 2; 2, 2; 2, 5; 5, 8; 8, 13. Uspořádání kostek v prvním možném řešení najdete v obrázku č. 1.

Nyní ve stručnosti naznačení způsobu řešení v druhém případě. Uspořádání kostek do zajíce najdete na obrázku č. 2. Postupoval jsem podobným způsobem. Za výchozí kostku jsem zvolil kostku s číslem 55, které se nachází v nabídce pouze jednou. K této kostce jsem přidal i kostky s čísly 34. Kostky s nejvyššími čísly jsem použil na nejvyšší součet a pak jsem se snažil uspořádat ostatní kostky podle potřeb, až se dostáváme k výsledku.





Řešení S-II-2-2

Naším úkolem je vytvořit výraz, který by vyjadřoval největší z čísel, jež lze sestavit z následujících symbolů: číslice „1, 2, 3, 4“; závorky „(,)“; desetinné čárky „ , “; znaménka pro odečítání „ - “. Posledně zmiňovaný symbol bychom spíš měli pojímat jako symbol pro označení záporných čísel, než jako symbol pro označení operace odečítání. Úspěšné řešení této úlohy je tedy založeno na schopnosti porovnávat velikosti čísel.

Pro úplnost uvedeme možná řešení. Začneme nejprve těmi, které obsahují pouze číslice.

1. 4321 – jedná se o pouze zřetězení číslic v číslo, jehož velikost jsme schopni určit.

   Nyní budeme vytvářet výrazy, ve kterých se objevují mocniny.

2. 321^4 – prvním typem jsou čísla, kde základ mocniny je číslo tříciferné a mocnitel je číslo jednociferné. Asi nikomu nebude činiti obtíží ověřit, že toto číslo je z nich největší.

3. 31^{42} – druhým typem jsou čísla, ve kterých jsou základ mocniny i mocnitel čísla dvouciferná.

4. 3^{421} – třetím typem jsou čísla, kde základ mocniny je číslo jednociferné a mocnitel je číslo tříciferné.

   Nyní budeme vytvářet mocniny, ve kterých se objevují složené mocniny.

5. 21^{3^4} – základ mocniny je dvouciferné číslo a mocnitel je mocnina o jednociferném základu a jednociferném mocniteli.

6. 2^{31^4} – základ mocniny je jednociferné číslo a mocnitel je mocnina o dvouciferném základu a jednociferném mocniteli.

7. $2^{3^{41}}$ – základ mocniny je jednociferné číslo a mocnitel je opět mocnina o jednociferném základu a dvouciferném mocniteli.

V každé skupině je uveden výraz, který vyjadřuje největší číslo, které lze utvořit daným postupem. Jak však takové číslo určit, pokud nám to naše schopnosti popř. kalkulačka nedovolují? Povoláme si na pomoc zdatného přítele a tím jen Logaritmus. Zajisté se s ním již znáte, avšak nejste si vědomi jeho schopností. Tak nyní se je pokusím demonstrovat na dvou příkladech.

1. chceme zjistit, které z čísel $2^{3^{41}}$ a $2^{4^{31}}$ je větší než to druhé. Hlava nám to nebere a kalkulačka jakbysmet. Proto nastupuje do boje pan Logaritmus.

   Nejprve si sestavíme zápis pro porovnávání.

   $2^{3^{41}} ? 2^{4^{31}}$ – správný symbol doplníme až na konci a můžeme volit z několika $(=, >, <, \ldots)$

   $\log 2^{3^{41}} ? \log 2^{4^{31}}$ – můžeme použít standardně logaritmus o základu deset a nebo o něco vtipněji logaritmus o základu dva

   $\log_2 2^{3^{41}} ? \log_2 2^{4^{31}}$ – tradičně upravíme

   $3^{41} \cdot \log_2 2 ? 4^{31} \cdot \log_2 2$ – znovu upravíme

   $3^{41} ? 4^{31}$ – a znovu použijeme logaritmus

   $\log 3^{41} ? \log 4^{31}$

   $41 \log 3 ? 31 \log 4$ – a to už nám kalkulačka bere, tedy $41 \log 3 > 31 \log 4$ a tedy i

$$2^{3^{41}} > 2^{4^{31}}$$

2. chceme zjistit, zda náhodou číslo $3^{4^{21}}$ přeci jenom není větší než $2^{3^{41}}$. Opět si sestavíme zápis, podle kterého budeme dále postupovat.

   $3^{4^{21}} ? 2^{3^{41}}$ – nyní můžeme použít pouze logaritmus o stejném základu, tak např. desítkový

   $\log 3^{4^{21}} ? \log 2^{3^{41}}$

   $4^{21} \cdot \log 3 ? 3^{41} \cdot \log 2$ – toto už některé kalkulačky zvládnou, avšak my pokročíme ještě o krůček dál. Opět zlogaritmujeme obě strany logaritmem o stejném základu.

   $\log (4^{21} \cdot \log 3) ? \log (3^{41} \cdot \log 2)$

   $\log 4^{21} + \log(\log 3) ? \log 3^{41} + \log(\log 2)$ – a toto už kalkulátory, které mají logaritmus zvládnou.

Obdobným způsobem lze porovnat ty, kde jsme si nejistí.

Na závěr uveďme několik zajímavostí. Pokud se budeme držet tradičního zápisu, tak k zamíchání pořadí díky desetinné čárce nedojde. Přece jenom číslo $432,1$ na to není dostatečně veliké. Další čísla, která aspirují na post velkých čísel jsou čísla kombinační ve tvaru $\binom{a}{b}$, tato čísla, ale jsou menší než mocninné funkce.(Zkuste si sami.)

Jiná situace nastane když opustíme tradiční styl zápisu a přidržíme se tzv. kalkulačkového stylu zápisu. Na kalkulačce je totiž možné místo $0,1$ napsat jen $,1$ (schválně, zkuste si to), a tudíž ve výrazu můžeme použít všechny symboly. Takže jako perličku na závěr uvádím výraz, který vytváří největší (známé) číslo, které lze z uvedených symbolů vytvořit.

$$,3^{-,2^{-,1^{-4}}}.$$

Řešení S-II-2-3

Výběh s příkopem bude vypadat takto:

K výpočtu strany a použijeme Pythagorovu větu:

$$a^2 = 13^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$a = \frac{26}{\sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{3}\mathrm{m}.$$

Strana a se rovná poloměru kružnice opsané šestiúhelníku.

Má-li být příkop kolem šestiúhelníku široký 10 m, pak kolem jednotlivých stran šestiúhelníku budou rovnoběžky v dané vzdálenosti a v rozích budou kruhové výseče s poloměrem právě 10 m. Uvědomme si, že složením těchto kruhových výsečí dostaneme kruh o poloměru 10 m.

Obsah vzniklého útvaru je tedy roven obsahu šesti vzniklých obdélníků, ke kterému připočteme obsah výše zmíněného kruhu.

$S_0 = ab$ $S_k = \pi r^2$ $S_0 = \frac{260\sqrt{3}}{3}\mathrm{m}^2$ $S_k = 314{,}2\mathrm{m}^2$

$S = 6S_0 + S_k$ $S = 1214{,}9\mathrm{m}^2$

Objem odvezené zeminy se bude počítat pomocí tohoto celkového obsahu. Objem tedy bude: $V = S \cdot h$ $V = 3644{,}7\mathrm{m}^3$

Řešení S-II-2-4

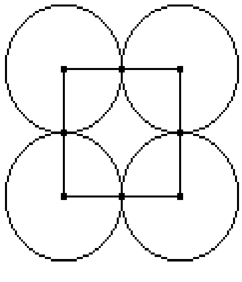
Naším úkolem vlastně je zjistit, jaký je průměr jedné kuličky a jak jsou kuličky v krabici naskládané, aby mohlo platit, že postačuje zvětšit dva rozměry krabice o 9 mm a kuliček se do krabice vejde více.

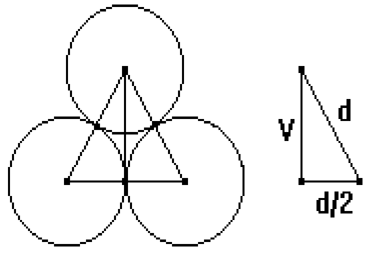
Předpokládejme, že vrstva kuliček na dně je rozmístěna „perfektně“. Tj. po rozmístění tam nezbývají žádné mezery. (K tomu nás vede ten fakt, že obchodník chtěl vždy dát do krabice co nejvíce kuliček a přitom chtěl ušetřit za materiál na krabicích. Tedy je nevyráběl „zbytečně“ větší.)

Je zřejmé, že průměr kuličky ložiska d je menší než 9 mm a že nemá valnou cenu uvažovat s větší přesností než na milimetry. Potom průměr kuličky může být $d_1 = 10$ mm, $d_2 = 20$ mm a $d_3 = 40$ mm. Neboť to jsou společní dělitelé šířky a délky krabice menší než 9 mm.

Nyní jde o to rozmyslet si, jak jsou jednotlivé vrstvy rozmístěny na sobě. V úvahu připadají dvě možnosti:

1. kuličky jsou nad sebou, viz obr.
2. kuličky jsou mezi sebou, viz obr.





V prvním případě je pro n vrstev třeba výška

$$nd.$$

Ve druhém případě je pro n vrstev nutná výška

$$d[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)],$$

protože pro V trojúhelníku platí

$$V^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Pro d_1 tak dostáváme v prvním případě $n = 14$ avšak ve druhém případě je počet vrstev $n = 16$, protože

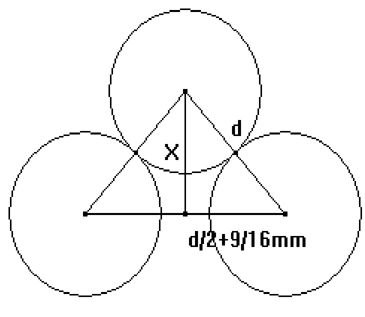
$$10[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(16-1)] \text{ mm} \leq 140 \text{ mm},$$

$$10[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(17-1)] \text{ mm} > 140 \text{ mm}.$$

V prvním případě je tedy v krabici uloženo $28 \cdot 20 \cdot 14 = 7840$ kuliček. Ve druhém případě pak $28 \cdot 20 \cdot 8 + 27 \cdot 19 \cdot 8 = 8584$ kuliček, tedy více než v prvním případě.

Stejně budeme postupovat pro d_2 a d_3. Pro d_2 je v obou uvažovaných případech možné umístit do krabice 7 vrstev, tudíž je výhodnější skládat je na sebe. Kuliček by v tomto případě bylo v krabici 980. Pro d_3 je situace obdobná, v obou případech je možné naskládat na sebe nejvýše 3 vrstvy. Opět je výhodnější umístit kuličky podle prvního způsobu, avšak tentokrát je výška krabice o 2 cm více, než je pro takové uskupení třeba a proto nemusíme tento rozměrem ložiska dále uvažovat.

Uvažujme nyní, že průměr kuličky je $d_2 = 20$ mm. Zvětšíme-li rozměry krabice o 9 mm, je zřejmé, že nevznikne dostatek prostoru pro další řadu či vrstvu. Aby se zvětšil počet kuliček, musí se v krabici přemístit tak, že nyní budou mezi sebou. Pokud se spodní vrstva rozmístí po celé délce krabice, vzniknou mezi kuličkami mezery o velikosti $\frac{9}{8}$ mm. (Mezery budou skutečně rovnoměrné, neboť na všechny kuličky působí stejná tíhová síla.)



Pro n vrstev je pak nutná výška

$$d + (n-1)X,$$

tj. přibližně

$$[20 + (n-1)16,5] \text{ mm}.$$

Do 149 mm se tak vejde 8 vrstev a celkový počet kuliček je $14 \cdot 10 \cdot 4 + 13 \cdot 9 \cdot 4 = 1028$. Kuliček je tedy více, než bylo v původní krabici. Avšak výška krabice, která je nyní potřeba pro takovéto rozmístění kuliček je dokonce menší, než původní. Tedy nebylo třeba krabici do výšky zvětšovat. I tento poloměr ložiska tedy nevyhovuje zadání úlohy.

Uvažujeme-li průměr kuličky $d_1 = 10$ mm, budou mezery mezi kuličkami $\frac{1}{2}$ mm a výška uvažovaného trojúhelníku spojnic středů kružnic V bude přibližně 8,5 mm. Počet vrstev, které je možné nyní umístit do krabice je 17 a celkový počet kuliček se tak zvýšil na $28 \cdot 20 \cdot 9 + 27 \cdot 19 \cdot 8 = 9144$. Výška 17 vrstev kuliček při tomto rozmístění je přibližně 147 mm.

Průměr ložiskové kuličky je tedy $d = 10$ mm, v původní krabici jich bylo 8584 a ve zvětšené 9144.

Pozn.: Můžete si sami ověřit, že pokud by byla krabice zvětšena jen o 8 mm, nebylo by možné jednu vrstvu přidat.

Řešení S-II-2-5

Při řešení této úlohy využijeme následující tvrzení:

Tvrzení: Pro libovolné $k \in R$ platí $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$.

Důkaz:

Zcela evidentně platí vztah

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

po vynásobení celé rovnice k^2 a jednoduché úpravě dostáváme vztah

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2.$$

Zvolíme-li za $k = 11\dots1$ je úloha vyřešena, protože $3 \cdot 11\dots1 = 33\dots3$ a $4 \cdot 11\dots1 = 44\dots4$ a $5 \cdot 11\dots1 = 55\dots5$.