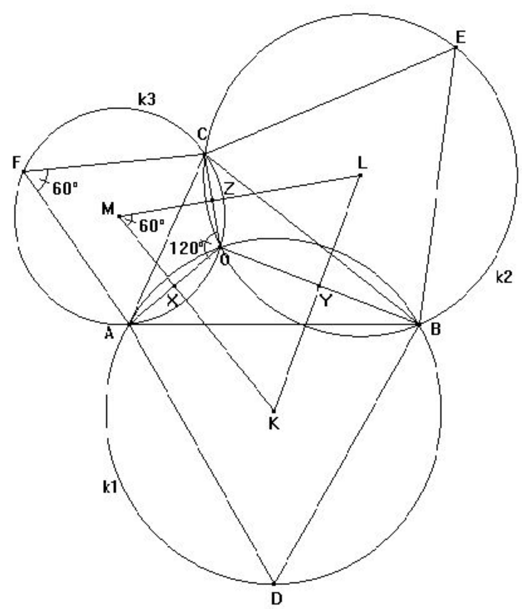
Řešení 3. série kategorie STUDENT S-II-3

Řešení S-II-3-1

Nejprve si úlohu narýsujeme. Zjistíme, že hledané úhly by mohly mít velikost 60°. Vyslovíme proto hypotézu, že vzniklý trojúhelník je rovnostranný, což znamená, že jeho úhly jsou rovny 60°.



Důkaz:

Mějme libovolný trojúhelník ABC. Sestrojme nad jeho stranami rovnostranné trojúhelníky ADB, CBE, ACF. Těmto trojúhelníkům opíšeme po řadě kružnice k_1, k_2, k_3 se středy K, L, M, což jsou právě vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad prostředními třetinami stran trojúhelníku ABC. To plyne z podobnosti dvou rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad příslušnou stranou, resp. nad prostřední třetinou trojúhelníku ABC. (Také K náleží ose strany AB, ale také ose strany AD a zároveň ose strany BD, z čehož vyplývá, že je to střed kružnice opsané. Stejně pro body L a M.) Naším úkolem je tedy dokázat, že trojúhelník KLM je rovnostranný, resp. že jeho úhly mají velikost 60°.

Kružnice $k_1,\ k_2,\ k_3$ se protnou v jednom bodě, označme ho O. Plyne to ze skutečnosti, že z jednoho z průsečíků kružnic $k_1,\ k_2$ (druhým je vrchol B) jsou vidět strany AB a BC pod úhlem 120° a strana AC pod úhlem $360° - 2 \cdot 120° = 120°$. Tedy bod O musí nutně ležet i na kružnici k_3. Protože jen z jejích bodů je vidět strana AC pod úhlem 120°.

Vyšetřeme nyní úhly ve vzniklém čtyřúhelníku $XOZM$, kde body $X,\ Y$ a Z jsou po řadě průsečíky KM a AO, KL a BO a LM a CO. U vrcholu O je úhel 120°, neboť obvodový úhel příslušný oblouku AFC má velikost 60°. Dále úhly OXM a OZM jsou pravé, neboť úsečky AO a CO jsou spojnice průsečíků kružnic $k_1,\ k_3$ a úsečky MK a ML

spojnice středů těchto kružnic. Je zřejmé, že spojnice průsečíků a spojnice středů jsou na sebe kolmé. Součet úhlů ve čtyřúhelníku je roven 360°.

$$|\angle MXO| + |\angle XOZ| + |\angle OZM| + |\angle ZMX| = 360^\circ$$

$$90^\circ + 120^\circ + 90^\circ + |\angle ZMX| = 360^\circ$$

$$|\angle ZMX| = 60^\circ.$$

Úhel u vrcholu M je roven 60°.

Stejnou úvahu můžeme zopakovat i pro úhly u vrcholu K a L čtyřúhelníku $YOXK$, resp. $ZOYL$. Proto jsou úhly u vrcholů K, L i M rovny 60°.

Tímto je důkaz hotov.

Řešení S-II-3-2

Na obrázku je sedm rovnostranných trojúhelníků. Označme políčka v obrázku písmeny od a do i. (viz obr.)

Ze zadání vyplývá vztah : $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

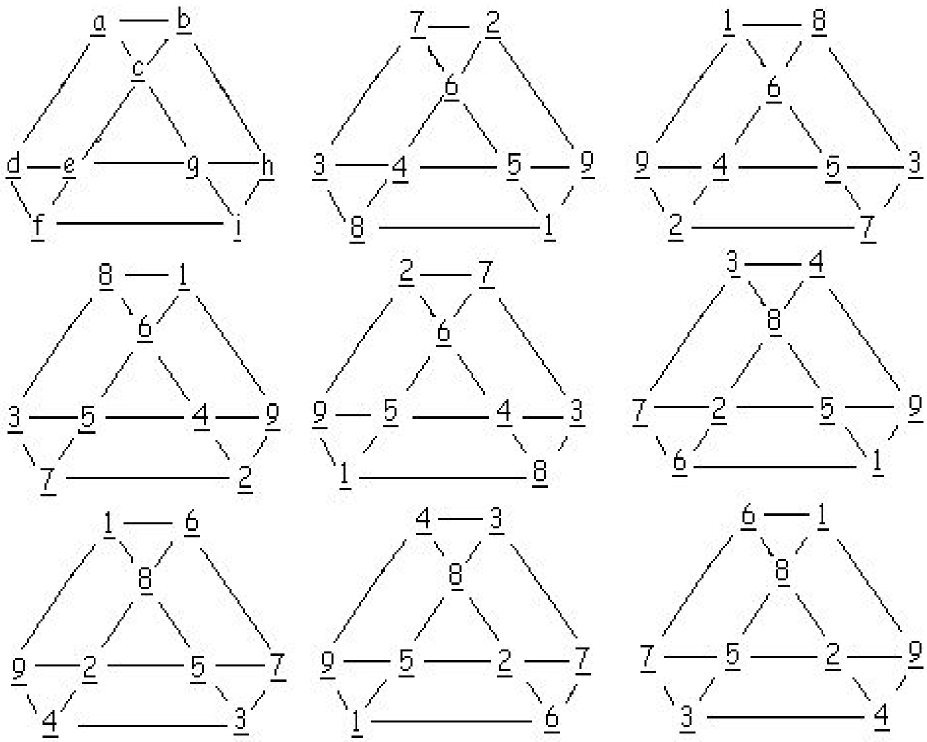
Součet cifer, který má být ve všech sedmi trojúhelnících stejný, označíme x. Z obrázku je zřejmé, že $x = a+b+c = d+e+f = g+h+i$, tedy $3x = 45$, a proto $x = a+b+c = d+e+f = g+h+i = 15$.

Z množiny cifer 1 až 9 vypišme až na pořadí všechny trojice takové, že jejich součet je 15:

$$(1,5,9); (1,6,8); (2,4,9); (2,5,8); (2,6,7); (3,4,8); (3,5,7); (4,5,6).$$

Těchto neuspořádaných trojic je celkem 8, my však jimi potřebujeme obsadit pouze 7 trojúhelníků: Všimneme-li si trojúhelníku uprostřed obrázku, uvidíme, že každý z jeho vrcholů je zároveň vrcholem dalších dvou rovnostranných trojúhelníků (velkého a malého). To znamená, do trojúhelníku uprostřed můžeme umístit pouze ty trojice, které obsahují cifry vyskytující se ještě v nejméně dalších dvou trojicích. Tuto podmínku splňují trojice (2, 5, 8) a (4, 5, 6), je tedy zřejmé, že umístíme-li do obrázku jednu z nich, už se nám nepodaří umístit tam tu druhou. (Pokud by v obrázku byly obě trojice současně, už by se tam nevešla jedna z trojic (1, 5, 9); (3, 5, 7), protože žádný z vrcholů v obrázku není vrcholem 4 rovnostranných trojúhelníků současně. Platí ale, že každé z políček je vrcholem nejméně dvou rovnostranných trojúhelníků, proto nemůžeme vynechat cifry, které se v našich osmi trojicích vyskytují právě dvakrát, tedy 1, 9 nebo 3, 7).

Počet všech řešení je až na otočení 8: Máme na výběr dvě trojice do trojúhelníku uprostřed, v tomto trojúhelníku máme pro každou trojici dvě možnosti rozmístění vrcholů a pro každý z vrcholů prostředního trojúhelníka máme dvě možnosti rozmístění vrcholů v jemu příslušném malém a velkém trojúhelníku.



Řešení S-II-3-3

Aby tato podmínka mohla být splněna, musel by lovec stát na Severním pólu, neboť z tohoto místa bude vždy mířit pouze na jih a bude od medvěda vzdálen vždy 100m a to i v případě, že medvěd uběhne vzdálenost 100m na východ.

Medvěd žijící na Severním pólu má barvu bílou.

Řešení S-II-3-4

Ze zadání je zřejmé, že mohou nastat dvě možnosti.

1. Jsou shodné 3 dvojice stran a 2 dvojice úhlů.
2. Jsou shodné 3 dvojice úhlů a 2 dvojice stran.

V prvním případě by ale vždy byly trojúhelníky shodné podle věty *sss*.

Druhý případ může nastat, trojúhelníky být shodné nemusí, ale jsou nutně podobné podle věty *uuu*. Vezměme si dva trojúhelníky ABC a XYZ tak, že platí $\angle ABC \sim \angle XYZ \wedge \angle BCA \sim \angle YZX \wedge \angle CAB \sim \angle ZXY$. Nechť dále platí $x = b$ (1) a $y = c$ (2). Protože jsou ale trojúhelníky ABC a XYZ podobné musí existovat kladné reálné číslo k tak, že $x = ka$ (3), $y = kb$ (4) a $z = kc$ (5). Dosadíme-li z (2) do (4), dostáváme $b = \frac{c}{k}$ (6). Z (1) a (3) plyne $b = ka$, dosadíme-li za b z (6), dostaneme po jednoduché úpravě $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$. Dosadíme-li toto do (5), konečně obdržíme $z = c\sqrt{\frac{c}{a}}$. Tedy pro $c \neq a$ je $z \neq a$. Ještě si musíme uvědomit, že tato čísla musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost. Zkusme pro to najít alespoň jednu čtveřici splňující všechny výše uvedené podmínky. Délky stran trojúhelníka ABC nechť jsou $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$, délky stran trojúhelníka XYZ pak musí být $x = 4,\ y = 5,\ z = \sqrt{\frac{5^3}{3}} \doteq 6.455$ a pro oba trojúhelníky jsou splněny trojúhelníkové nerovnosti. Je zřejmé, že takových dvojic trojúhelníků je nekonečně mnoho.

Řešení S-II-2-5

Rozložme číslo 32118 na součin prvočísel.

$$32118 = 2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101.$$

Jak může být kapitán starý ... určitě více než 15 a méně než 100 let (jinak by byl asi těžko v činné službě). Jediné číslo, které lze získat jako součin výše uvedených prvočísel větších než 15 a menších než 100 je 53. Kapitánovi je tedy 53 let. Pak může mít 1, 2, 3 nebo 6 dětí a tomu přísluší délka lodi 606, 303, 202, resp. 101 metrů.