Řešení 4. série ročníku II kategorie STUDENT

Řešení S-II-4-1

Hledáme největší objem $V = abc$. V našem případě $V = r(60-2r)(60-2r)$, kde r je strana malého vyříznutého čtverečku. Objem je tedy funkcí r, proto hledáme maximum funkce

$$V = r(60-2r)(60-2r) \qquad [\mathrm{cm}^3],$$

tj.

$$V = 4r^3 - 240r^2 + 3600r \qquad [\mathrm{cm}^3],$$

kde $r \in (0,\ 30)$ (v cm).

Maximum takové funkce můžeme určit několika způsoby. Uvedeme dva, které jste i vy využili nejčastěji. Lokální extrémy funkce zjistíme pomocí derivace. Nejprve určíme, pro která r je první derivace funkce rovna nule. Protože

$$V'(r) = 12r^2 - 480r + 3600,$$

řešíme rovnici

$$12r^2 - 480r + 3600 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny $r_1 = 10$, $r_2 = 30$. V těchto bodech nabývá funkce $V(r)$ lokálních extrémů. Zbývá určit, zda jde o lokální maximum či minimum, což určíme pomocí druhé derivace.

$$V''(r) = 24r - 480,$$

kde

$$V''(r_1) = V''(10) = -240 < 0,$$

$$V''(r_2) = V''(30) = 240 > 0.$$

Z toho vyplývá, že v bodě $r_1 = 10$ funkce nabývá lokálního maxima a vbodě $r_2 = 30$ funkce nabývá lokálního minima.

Rozměr vyříznutého čtverečku je 10×10 cm^2. Maximální objem krabice získáme dosazením kořene r_1 do původního vzorce

$$V = 10(60 - 2\cdot 10)(60 - 2 \cdot 10) \qquad [\mathrm{cm}^3],$$

$$V = 16000\mathrm{cm}^3.$$

Maximální objem můžeme také odhadnout na základě tabulky a grafu funkce $V(r) = r(60-2r)(60-2r)$ a náš odhad pak dokázat. Opět je r strana vyříznutého čtverce a musí nabývat kladných hodnot menších než 30 cm. Vytvoříme tabulku hodnot funkce

$$V(r) = r(60-2r)(60-2r).$$

r [cm]	0	1	5	10	15	20	25	29	30
V[cm^3]	0	3 364	12 500	16 000	13 500	8 000	2 500	116	0

Zjistíme, že pro $r = 10$ cm je objem krabice maximální, což ale musíme dokázat. Zvolme r z okolí 10 (v def. oboru) a dokažme, že pro takové je hodnota objemu nejvýše rovna objemu pro $r = 10$. Položme

$$r = 10 + \varepsilon,$$

potom

$$V = 4\varepsilon^3 - 120\varepsilon^2 + 16000.$$

Máme tedy dokázat, že

$$V(10) = 16000 \geq 4\varepsilon^3 - 120\varepsilon^2 + 16000,$$

neboli

$$0 \geq \varepsilon^3 - 30\varepsilon^2$$

pro $\varepsilon \in (10,\ 20)$.

Pro $\varepsilon = 0$ se nerovnost změní na rovnost, což je zřejmé. Pro nenulová ε můžeme nerovnici vydělit ε^2, protože je vždy kladné a tudíž se znaménko nerovnosti nezmění. Dostáváme

$$\varepsilon \leq 30.$$

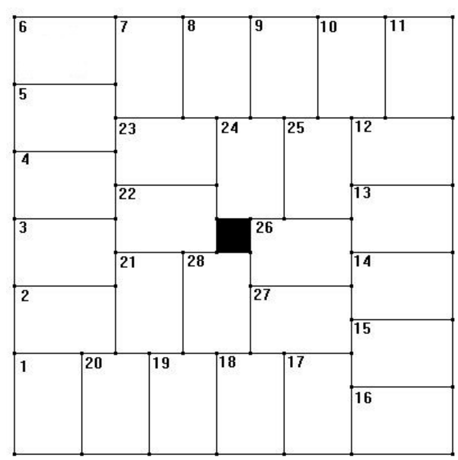
Tedy výše uvedená nerovnice je splněna pro $\varepsilon \leq 30$.

Tím je důkaz proveden, protože nerovnost je splněna v celém požadovaném intervalu.

Objem krabice je 16 000 cm^3.

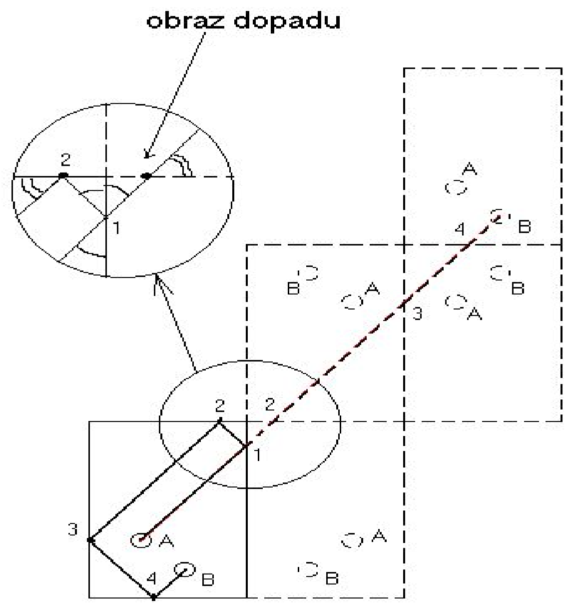
Dalším úkolem bylo zjistit, jaký největší počet kousků koláče ve tvaru kvádru o rozměrech 6 cm, 9 cm a 3 cm je možné do krabice naskládat. Kousky se nesmí dělit, leží vždy na stěně o největším obsahu a smějí se pokládat na sebe.

Rozměry krabice jsou 40 x 40 x 10 cm^3. Nejprve zjistíme kolik vrstev je možné do krabice naskládat. Musí to být přirozené číslo. Výška krabice je 10 cm, výška koláče jsou 3 cm. Je patrné, že se do krabice vejdou 3 vrstvy. Nyní zjistíme maximální počet kousků s podstavou o rozměrech $6 \times 9\ \mathrm{cm}^2$, které se vejdou na dno o rozměrech $40 \times 40\ \mathrm{cm}^2$. Označme k počet kousků, které jsou přilehlé ke stěně krabice stranou o velikosti 6 cm, a l počet kousků, které jsou přilehlé stranou o velikosti 9 cm (k a l jsou přirozená čísla). Musí platit $6k + 9l \leq 40$, přičemž chceme, aby číslo $6k + 9l$ bylo co největší. Např. postupným ukážeme, že je to pro $k = 2$ a $l = 3$ je rovno 39 a stejně tak pro $k = 5$ a $l = 1$. Budeme-li postupně koláč skládat tak, abychom stále dodržovali tato dvě rozmístění, celkem můžeme naskládat do krabice v jedné vrstvě 29 kousků, celkem tedy $3 \cdot 28 = 84$.



Řešení S-II-4-2

K řešení této úlohy jsme použili vlastnosti osové souměrnosti (zachovává velikosti úhlů a velikosti úseček). Dále z fyziky víme, že se úhel odrazu rovná úhlu dopadu. Z detailu prvního odrazu je vidět, že na obrazu prvního stolu se úhly rovnají a tím i vzdálenost dalšího dopadu (tečka). Takto pokračuji dále. Celá dráha koule se projeví jako přímka. Stačí tedy vytvořit obrazy stolů (viz čárkované) a spojit A s B. Na jednotlivých obrazech stolů budou ležet i se mi obrazy bodů odrazů (jsou číslované) koule A.



Řešení S-II-4-3

Dokažme nejprve pomocné tvrzení:

Každé číslo ve tvaru $10^{3n-1}+11$ je dělitelné číslem 37.

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro $n=1$ jde o číslo $10^2+11=111=3\cdot 37$, které je dělitelné 37.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro libovolné pevné přirozené číslo n tj., číslo $10^{3n-1}+11$ je dělitelné číslem 37. Dokažme pak toto tvrzení i pro číslo $n+1$.

Číslo $10^{3(n+1)-1}+11$ lze zapsat jako

$$\left(10^{3n-1}+11\right)+\left(10^{3n+2}+11\right)-\left(10^{3n-1}+11\right)=$$

$$10^{3n-1}(10^3-1)+\left(10^{3n-1}+11\right).$$

Číslo $10^{3n-1}+11$ je dělitelné 37 dle předpokladu. Číslo $10^{3n-1}(10^3-1)$ je také dělitelné 37, protože

$$10^{3n-1}(10^3-1)=10^{3n-1}\cdot 999=10^{3n-1}\cdot 27\cdot 37.$$

Jejich součet musí být tedy také dělitelný 37 a tvrzení je tím dokázáno.

Číslo

$$1\underbrace{00\ldots00}_{2004\text{nul}}11$$

lze napsat ve tvaru $10^{2006}+11$, kde $2006=3\cdot 669-1$ je číslo ve tvaru $10^{3n-1}+11$. Proto je tedy dělitelné 37.

Řešení S-II-4-4

Vycházejme z tvrzení osby B: protože jediná řekla dvě informace a můžeme dojít ke sporu.

1. Předpokládáme, že B lže, tedy Q je vrah, tedy A mluví pravdu, tedy C lže, tedy D mluví pravdu, odtud E lže a odtud B mluví pravdu. Docházíme ke sporu.

2. Předpokládejme nyní, že B mluví pravdu, tedy C mluví pravdu, odtud D lže, odtud E mluví pravdu a odtud B mluví pravdu.

Tedy víme, že B mluví pravdu, to znamená Q není vrah.

Řešení S-II-4-5

Střed kružnice k, bod M musí ležet na základně. Střed základny O, který je i patou kolmice spuštěné z bodu K na základnu, musí ležet na Thaletově kružnici t nad průměrem KM a těžiště V leží v jedné třetině úsečky OK blíže k bodu O. Jiné požadavky už v zadání úlohy nejsou. Množina všech středů základen je výše zmíněná kružnice kromě bodu K. Množina všech těžišť (východů) V je kružnice v se středem v bodě L, který leží na úsečce KM a platí $3|KL| = |KM|$, a poloměrem $\frac{1}{3}|KM|$, kromě bodu K. Kružnice v je obrazem kružnice t ve stejnolehlosti se středem K a poloměrem $\frac{2}{3}$.