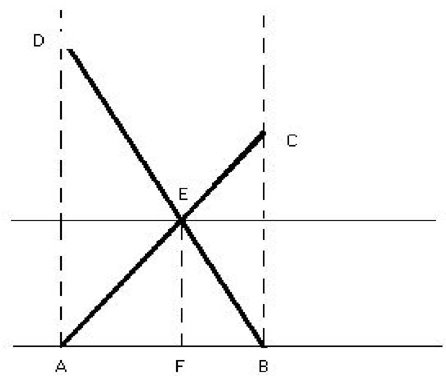
Řešení 5. série ročníku II kategorie STUDENT

Řešení S-II-5-1

Nejprve si narýsujme rovinnou projekci dané situace (viz obr.)



Pro velikosti úseček platí $|AC| = 2$, $|BD| = 3$, $|EF| = 1$. Označme $|AD| = x$, $|BC| = y$. Hledáme velikost úsečky $|AB|$.

Z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle BDA$ pomocí Pythagorovy věty dostáváme $x^2 + |AB|^2 = 9$ a z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle CAB$ pomocí Pythagorovy věty $y^2 + |AB|^2 = 4$. Odečtením obou rovností získáme $x^2 - y^2 = 5$.

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ABD \simeq \triangle FBE$ získáme vztah

$$\frac{x}{|EF|} = \frac{|AB|}{|BF|} \Rightarrow |BF| = \frac{|AB|}{x} \quad (1),$$

obdobně z podobnosti trojúhelníků $\triangle AED \simeq \triangle CEB$ získáme vztah

$$\frac{x}{y} = \frac{|AF|}{|BF|}.$$

Dosadíme-li do této rovnice z (1) dostáváme po jednoduché úpravě $xy = x + y$.

Získali jsme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $x^2 - y^2 = 5 \wedge xy = x + y$. Vyjádříme si y z druhé rovnice $y = -\frac{x}{1-x}$ a dosadíme do první rovnice, dostaneme

$$x^2 - \frac{x^2}{(1-x)^2} = 5.$$

Po vynásobení výrazem $(1-x)^2$ a jednoduché úpravě získáme rovnici

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 5 = 0.$$

Dostali jsme rovnici 4. stupně, kterou neumíte obecně řešit, i když je obecně řešitelná na rozdíl od rovnic 5. a vyšších stupňů. Zkusíme tedy najít aspoň její přibližné řešení. Ani staří Egypťané ji neuměli řešit a museli ji tedy vyřešit podobně jako my. Budeme ji řešit pomocí metody, která se nazývá metoda půlení intervalu. Mohli jste ji řešit i jinak, např. postupným dosazováním za x tak, aby jste obdrželi číslo co nejbližší 0. Metoda je založena na tom, že pokud funkce na levé straně rovnice je rozumná, tzn. spojitá, což naše funkce je, pak platí. Pokud má v nějakém bodě hodnotu kladnou a v jiném bodě hodnotu zápornou musí se mezi těmito body nacházet bod, kde má hodnotu 0 (tzv. Bolzanova věta). Je zřejmé, že nás bude zajímat jen to řešení, které je nějaké malé kladné číslo. Spočítáme si tedy její hodnotu v bodě 2 a zjistíme, že $f(2) = -5$ a v bodě 3 $f(3) = 7$. Mezi body 2 a 3 tedy musí ležet bod v němž je hodnota rovna 0. Nyní interval rozpůlíme, získáme bod 2,5 a spočítáme funkční hodnotu v tomto bodě $f(2,5) \doteq -3,438$. Tedy bod v němž je hodnota rovna 0 je mezi 2,5 a 3. Tento interval znovu rozpůlíme a pokračujeme úplně stejně. Dostáváme postupně hodnoty $f(2,75) \doteq 0,285$, $f(2,6) \doteq -2,254$, $f(2,7) \doteq -0.672 \ldots f(2,736) \doteq 0,005$, $f(2,735) \doteq -0,014$. Samozřejmě pokud bychom pokračovali dále mohli bychom najít ještě přesnější výsledek. Nám bude stačit s přesností na jednu tisícinu.

Dosadíme-li tento výsledek do úplně první rovnice, dostáváme

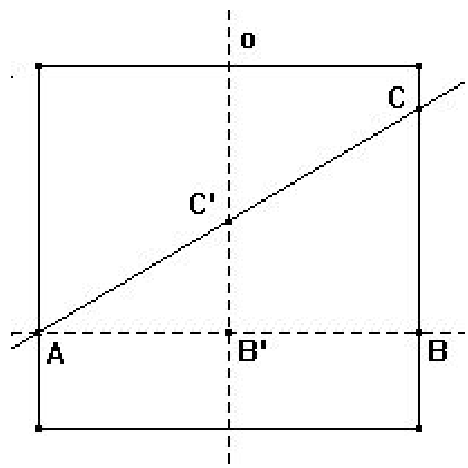
$$|AB|^2 \doteq 3^2 - 2,736^2$$

a z toho $|AB| \doteq 1,231$.

Průměr podstavy studny je přibližně 1,231 míry.

Řešení S-II-5-2

Tuto úlohu lze řešit různým způsobem. Ukažme si jeden založený na podobnosti trojúhelníku. Na obrázku je znázorněna osa o, libovolná příčka AC a rovnoběžka se základnou AB. Průsečíky s osou o označme B' a C'. Trojúhelníky ABC a $AB'C'$ si jsou podobné s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$, protože $|AB'| = \frac{1}{2}|AB|$. Proto i $|AC'| = \frac{1}{2}|AC|$ nebo jinak $|AC'| = |C'C|$, čili bod C' půlí úsečku AC.



Řešení S-II-5-3

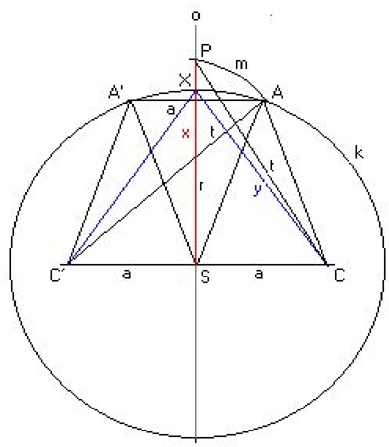
Nejprve pro jednoduchost přeznačme všechny objekty, s nimiž budeme pracovat (viz obr.): Je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r = |SA| = |SX| = |SA'| = |CA| = |C'A'|$. Na kružnici k je vymezen oblouk AA'. Vzdálenost bodů AA' označme a, tedy $a = |AA'| = |CS| = |C'S|$. Dále známe kružnici m se středem v bodě C' a poloměrem $t = |C'A| = |CA'| = |C'P| = |CP|$. Vzdálenost bodů S a P označíme x a navíc $y = |CX| = |C'X|$. Všechny rovnosti vyplývají ze souměrnosti podle osy o oblouku AA'. Máme dokázat rovnost $x = y$.

Nejprve si všimneme pravoúhlého trojúhelníku CSX s pravým úhlem při vrcholu S. Podle Pythagorovy věty platí

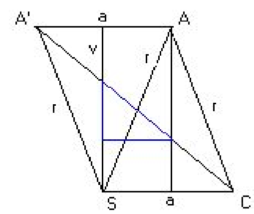
$$y^2 = a^2 + r^2. \tag{1}$$

Dalším pravoúhlým trojúhelníkem s pravým úhlem při vrcholu S je $\triangle CSP$. Také zde platí Pythagorova věta, tj.

$$t^2 = x^2 + a^2. \tag{2}$$



obr. 1



obr. 2

V rovnoběžníku $ACSA'$ (viz obr.) je velikost úhlopříčky CA' součtem velikostí těžnic $\triangle A'SA$ a $\triangle SAC$ spuštěných z vrcholu A', respektive C, protože úhlopříčky se v rovnoběžníku půlí. Vzhledem k tomu, že oba trojúhelníky jsou shodné a navíc rovnoramenné, těžnice z vrcholu S, respektive A, splyne s příslušnou výškou trojúhelníku $\triangle A'SA$, respektive $\triangle SAC$, jejíž čtverec snadno vyjádříme pomocí Pythagorovy věty :

$$v^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{3}$$

Zaměříme se nyní na trojúhelník, který je v obrázku vyznačen modrou barvou (viz obr.). O těžnicích v trojúhelníku víme, že se protínají v jednom bodě (těžiště), který ale navíc každou z těžnic dělí v poměru 2:1. Z toho dovedeme vyjádřit velikosti všech stran modrého trojúhelníku, který je zřejmě pravoúhlý, a tedy pro něj platí Pythagorova věta

$$\left(\frac{1}{3}t\right)^2 = \left(\frac{1}{3}v\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

Po dosazení rovnosti (3) a jednoduchých úpravách získáme

$$t^2 = r^2 + 2a^2. \tag{4}$$

Dosadíme vztahu (4) do rovnosti (2) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$x^2 = r^2 + a^2. \tag{5}$$

Nakonec z rovností (1) a (5) získáváme

$$x^2 = y^{\cdot}2$$

Protože se jedná o velikosti úseček, které samozřejmě nemohou být záporné, nutně platí

$$x = y,$$

což jsme měli dokázat. Tím je úloha vyřešena.

Řešení S-II-5-4

Péticiferných čísel, která mají číslo 1 na řádu desetitisíců je 4!. Jedná se o permutaci ze čtyř čísel 3, 5, 7 a 9. Obdobně postupujeme s čísly 3, 5, 7 a 9. Tzn. na řádu desetitisíců bude číslo 1 právě 24-krát, stejně to platí i pro ostatní čísla. Tedy v řádech desetitisíců bude součet

$$24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9).$$

Toto bude platit i pro řády tisíců, stovek, desítek a jednotek.

Součet všech takových pěticiferných čísel je tedy

$$24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 6\ 666\ 600.$$

Řešení S-II-5-5

V některém políčku je napsáno číslo 1, v jiném je číslo 10 000. Od prvního k druhému políčku se dostaneme například tak, že půjdeme nejdříve svisle (nahoru nebo dolů), až se dostaneme do stejného řádku, v jakém je druhé pole. Pak přejdeme vodorovně do tohoto druhého pole. Jsou-li obě uvažovaná pole v témže řádku, jdeme jen vodorovně. Jsou-li obě políčka v témže sloupci, jdeme pouze svisle. V každém případě obsahuje naše cesta nejvýše 100 políček z téhož sloupce a nejvýše dalších 99 políček v řadě. Přejdeme tedy nejvýše 198krát z jednoho políčka do políčka sousedního. Kdyby byl rozdíl čísel v sousedních políčkách vždy nejvýše 50, mohlo by se číslo v posledním políčku naší cesty rovnat nejvýše číslu $1 + 198 \cdot 50 = 9901$. Protože tam však je číslo 10 000, musí se na naší cestě objevit aspoň jednou přírůstek větší než 50.