Řešení 1. série kategorie STUDENT S-III-1

Řešení S-III-1-1

Řešíme zda číslo 13 dělí číslo

$$103^{53} + 53^{103}$$

Nejprve si oba sčítance přepíšeme na mocninu součtu

$$103^{53} = (8 \cdot 13 - 1)^{53}$$

$$53^{103} = (4 \cdot 13 + 1)^{103}$$

nyní upravíme pomocí binomické věty : $(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^i$

$$(8 \cdot 13 - 1)^{53} = \sum_{i=1}^{53} \binom{53}{i} (8 \cdot \mathbf{13} - 1)^{53-i} 1^i =$$

$$= \binom{53}{0} (8 \cdot \mathbf{13})^{53} 1^0 + \binom{53}{1} (8 \cdot \mathbf{13})^{52} 1^1 + \ldots + \binom{53}{52} (8 \cdot \mathbf{13})^{1} 1^{52} + \binom{53}{53} (8 \cdot \mathbf{13})^{0} 1^{53}$$

$$(4 \cdot 13 + 1)^{103} = \sum_{i=1}^{103} \binom{103}{i} (4 \cdot 13 + 1)^{103-i} (-1)^i =$$

$$= \binom{103}{0} (4 \cdot \mathbf{13})^{103} (-1)^0 + \binom{103}{1} (4 \cdot \mathbf{13})^{102} (-1)^1 + \ldots + \binom{103}{102} (4 \cdot \mathbf{13})^{1} (-1)^{102} +$$
$$\binom{103}{103} (4 \cdot \mathbf{13})^{0} (-1)^{103}.$$

V obou případech je každý člen kromě posledního dělitelný 13, tudíž i jejich součet je dělitelný 13. Zbývají poslední členy :

$$\binom{53}{53} (8 \cdot 13)^0 1^{53} = 1 \cdot 1 \cdot 1^{53} = 1$$

$$\binom{103}{103} (4 \cdot 13)^0 (-1)^{103} = 1 \cdot 1 \cdot (-1)^{103} = -1.$$

Jejich součet je roven nule, takže je celý součet dělitelný 13

Řešení S-III-1-2

Hynek uvažoval asi takto:

Vyjádřím-li si zkoumané číslo jako součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný číslem 11, ten pak mohu přestat uvažovat a zajímat se pouze o to, zda je číslem 11 dělitelný i druhý sčítanec. Mým cílem bude proto redukovat zkoumané číslo až na číslo dvouciferné, o kterém již snadno rozhodnu, zda je dělitelné číslem 11. Zkoumané číslo mohu vyjádřit jako číslo $m \cdot 100 + z$, kde číslo z je zbytek po vydělení daného čísla číslem 100. (Např. $54612 = 546 \cdot 100 + 12$.)

Mám-li dané číslo x a budu-li chtít dokázat, že je dělitelné číslem 11, pak budu postupovat takto:

$$x = m \cdot 100 + z, \text{ kde } z < 100$$

$$x = m \cdot (99 + 1) + z = (99m + m) + z = 99m + (m + z).$$

Číslo $99m$, pro všechna $m \in \mathbb{N}$ je evidentně dělitelné číslem 11. Stačí tedy dokázat, že číslo $m + z$ je dělitelné 11. Přičemž číslo $m + z$ je zřejmě menší než číslo x. Označím si číslo $m + z = x'$, s kterým opakuji tentýž postup.

$$x' = m' \cdot (99 + 1) + z' = 99m' + (m' + z'), z' < 100,$$

dále budu postupovat analogicky:

$$x'' = m' + z', \quad x'' = m'' \cdot (99 + 1) + z'' = 99m'' + (m'' + z''), z'' < 100, \text{ atd.}$$

Protože přirozená čísla mají nejmenší prvek, musím po dostatečném počtu dostat číslo, které je menší nebo rovno 100, o kterém snadno rozhodnu, zda je dělitelné číslem 11 a tím i o tom, je-li původní číslo x dělitelné 11.

Řešení S-III-1-3

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru právě tehdy, když je jejich největší společný dělitel $D(a, b)$ roven 1. Pro zjištění největšího společného dělitele použijeme tzv. Euklidova algoritmu, který je: Nechť $a > b$. Číslo a vydělíme číslem b a dostaneme rovnost $a = bx + c$, pokud je $c = 0$, tak je největším společným dělitelem číslo b. Pokud je $c \neq 0$, obdobně zjisťujeme největší společný dělitel čísel b a c, tedy vydělíme b číslem c a přepíšeme do tvaru $b = cy + d$, pokud je $d = 0$ je největším společným dělitelem čísel a a b číslo c. Jestliže $d \neq 0$, hledáme největšího společného dělitele čísel c a d, takto pokračujeme tak dlouho pokud nevyjde nulový zbytek. Největším společným dělitelem čísel a a b je poslední nenulový zbytek. V našem případě platí:

$$21n + 4 = (14n + 3) \cdot 1 + 7n + 1$$

$$14n + 3 = (7n + 1) \cdot 2 + 1$$

$$7n + 1 = (7n + 1) \cdot 1 + 0.$$

Poslední nenulovým zbytkem je číslo 1, které je tedy největším společným dělitelem čísel $21n + 4$ a $14n + 3$. Zlomek $\frac{21+4}{14+3}$ je v základním tvaru.

Řešení S-III-1-4

Máme zjistit, která přirozená čísla jsou v číselné soustavě o základu z, kde $z > 1$, zapsána n jedničkami. Uvažujeme pouze ta čísla, která jsou zapsána právě n jedničkami.

Nejznámější poziční soustava je o základu deset. Dalšími jsou například dvojková, trojková, šestnáctková, ...

V desítkové soustavě je číslo 537 824 zkráceným zápisem tohoto výrazu:

$$5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

V desítkové soustavě se tedy číslo $(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n)$, kde $x_i \in 0, 1, ..., 9$, rovná součtu:

$$x_1 \cdot 10^{n-1} + x_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot 10^1 + x_n \cdot 10^0$$

Položíme-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = 1$ a dosadíme do předchozího součtu, vznikne nám n-místné číslo složené ze samých jedniček.

$$1 \cdot 10^{n-1} + 1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 11 \ldots 11$$

Např. ve dvojkové soustavě je n-místné číslo ze samých jedniček rovno:

$$1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

atd.

Obecně je tedy číslo zapsané n jedničkami v soustavě o základu z, kde $z > 1$ a které se nazývá základ poziční soustavy, rovno:

$$1 \cdot z^{n-1} + 1 \cdot z^{n-2} + \ldots + 1 \cdot z^1 + 1 \cdot z^0,$$

což se rovná

$$1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^1 + \ldots + 1 \cdot z^{n-2} + 1 \cdot z^{n-1} = 1 + z + \ldots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

To je ale součet prvních n členů geometrické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a kvocient $q = z$. Jelikož víme, že koeficient se nerovná 1, je podle známého vzorce součet prvních n členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, tedy v našem případě:

$$\frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Hledanými čísly jsou proto všechna přirozená čísla, která splňují podmínku, že se rovnají číslu $\frac{z^n-1}{z-1}$.

Řešení S-III-1-5

Hledáme nejmenší x z množiny přirozených čísel, pro které je funkční hodnota polynomu $x^2 + x + 5$ číslo složené.

Přirozené číslo $n > 1$, které není prvočíslo, tj. má alespoň 1 dělitele různého od 1 a sama sebe n, se nazývá číslo složené. Označíme-li $f(x) = x^2 + x + 5$, dostáváme postupným dosazováním přirozených čísel do polynomu $f(x)$:

$$f(1) = 1 + 1 + 5 = 7$$
$$f(2) = 4 + 2 + 5 = 11$$
$$f(3) = 9 + 3 + 5 = 17$$
$$f(4) = 16 + 4 + 5 = 25$$

Čísla 7, 11, 17 jsou prvočísla a číslo 25 je složené, je dělitelné číslem 5. Číslo 4 je tedy nejmenší číslo z množiny přirozených čísel, pro které je funkční hodnota polynomu číslo složené.