Řešení 5. série IV. ročníku kategorie JUNIOR

RS-IV-5-1

Pro naše úvahy bude vhodné upravit si naší rovnici do tvaru

$$3^{|x-\frac{1}{4}|+2} = 5 + 4 \cdot \sin 2\pi x.$$

Budeme uvažovat o funkci na pravé straně naší rovnice, tj. o funkci $f(x) = 5 + 4 \cdot \sin 2\pi x$. Víme, že funkce $f_1(x) = \sin x$ je shora i zdola omezená a její funkční hodnoty jsou z intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$. Tedy funkce $f_2(x) = 4 \cdot \sin 2\pi x$ nabývá funkčních hodnot z intervalu $\langle -4,\ 4\rangle$. Máme-li ještě ke každé hodnotě z tohoto intervalu přičíst číslo 5, získáme interval pro funkční hodnoty funkce $f(x) \in \langle 1,\ 9\rangle$.

Stejnou úvahu nyní proveďme pro funkci $g(x) = 3^{|x-\frac{1}{4}|+2}$ na levé straně naší rovnice. Pro $x = \frac{1}{4}$ nabývá funkce svého minima (nejmenší možné hodnoty), a to $g(\frac{1}{4}) = 9$. Bude-li $x \neq \frac{1}{4}$, bude $g(x) > 9$.

Mají-li se levá i pravá strana rovnice sobě rovnat, musí nabývat stejné funkční hodnoty, a to 9. To nastává v jedniném bodě definičního oboru $x = \frac{1}{4}$. Tedy naše rovnice má jediný kořen v oboru reálných čísel, a to $x = \frac{1}{4}$.

RS-IV-5-2

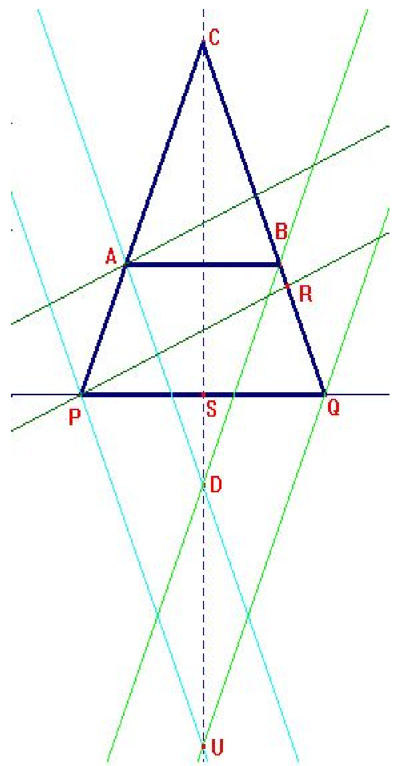
Pro konstrukci hledaného trojúhelníku je dobré uvědomit si následující věci:

- součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý
- úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné, tzn. $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$
- shodné jsou i velikosti výšek na daná ramena
- pata výšky na základnu leží ve středu základny, tato výška je zároveň osou strany, resp. úhlu

Rozbor

- ze známé velikosti úhlu γ při vrcholu C si dopočteme velikosti zbývajících úhlů, které jsou shodné
- můžeme narýsovat trojúhelník PQC (podle věty *uu*), který je podobný hledanému trojúhelníku ABC, trojúhelníků splňujících tuto vlastnost je však mnoho, my zvolíme libovolný z nich, avšak takový, který bude mít rozumné rozměry

- v trojúhelníku PQC sestrojíme výšky na základnu a jedno rameno, patu výšky na rameno označíme R a patu na základnu S
- při konstrukci vycházíme z podobnosti trojúhelníků, $|US| = |PR|$, bod D leží od bodu C ve vzdálenosti s (tj. součet výšek, viz zadání)
- $A \in PCq||PU$, $B \in CQ \cap r||QU$



obr. 1

Pozn.: V úvodu je možno sestrojit trojúhelník PQC tak, aby jeho výška na základnu byla dlouhá s, proto pak již nemusíme sestrojovat bod D, další postup však musíme absolvovat

Popis konstrukce

1. $\triangle PQC$ podle uu
2. p, výška na stranu CQ, R, pata výšky p
3. S, střed strany PQ

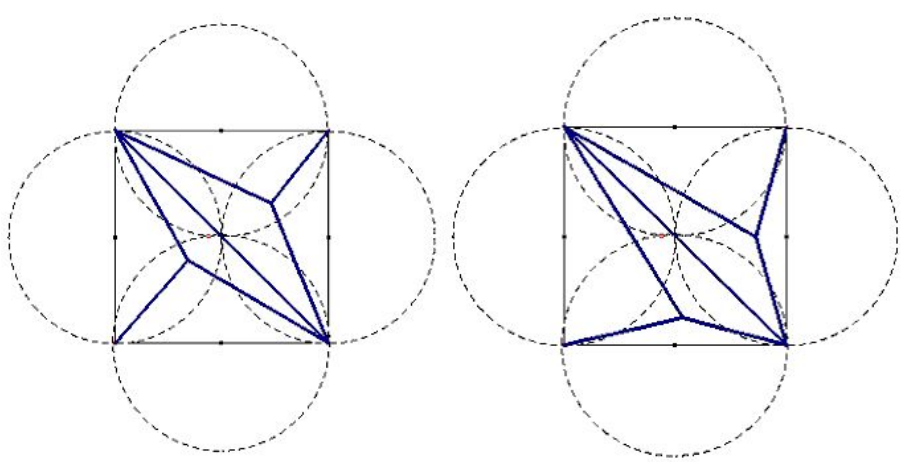
4. $U,\ U \in \rightarrow CS,\ |US| = |PR|$
5. $D,\ D \in \rightarrow CS,\ |CD| = s$
6. $\triangle PQU$
7. $q,\ q||PU,\ D \in q$
8. $r,\ r||QU,\ D \in r$
9. $A,\ A \in q \cap CP$
10. $B,\ B \in r \cap CQ$
11. $\triangle ABC$

Diskuse

Úloha má, při daném úhlu γ při vrcholu C, jednoznačné řešení, až na záměnu bodů A, B.

RS-IV-5-3

Tupoúhlý trojúhelník je takový, který má u jednoho vrcholu úhel větší než pravý úhel. Daný čtverec rozdělíme úhlopříčkou a poté nad každou stranou čtverce sestrojíme Thaletovu kružnici. Sestrojíme-li nad jednou stranou trojúhelník, nesmí jeho třetí vrchol ležet na Thaletově kružnici (to by byl pravoúhlý), bude-li ležet vně kružnice, bude ostroúhlý. Musí tedy ležet uvnitř.



obr. 2

V polorovině dané úhlopříčkou čtverce vzniknou tedy vždy alespoň 3 trojúhelníky, tj. minimální počet tupoúhlých trojúhelníků, na které lze rozdělit čtverec, je 6, viz obrázek 2.

RS-IV-5-4

Označme obě dvouciferná čísla jako AB a CD, kde písmena A, B, C, D označují cifry, které potřebujeme dopočítat, tedy $A,\ B,\ C,\ D \in \{0,\ 1, \ldots,\ 9\}$, $A,\ C \neq 0$. Ze zadání víme, že $AB \cdot CD = 2176$ a $BA \cdot DC = 1978$. Levá cifra určuje počet desítek a pravá počet jednotek. Přepíšeme tedy čísla do tvaru $AB = 10 \cdot A + B$, $CD = 10 \cdot C + D$, $BA = 10 \cdot B + A$, $DC = 10 \cdot D + C$. Tato čísla dosadíme do rovností ze zadání. Tedy

$$AB \cdot CD = 2176 = 100 \cdot A \cdot C + 10 \cdot (A \cdot D + B \cdot C) + B \cdot D \qquad (1)$$

$$BA \cdot DC = 1978 = 100 \cdot B \cdot D + 10 \cdot (B \cdot C + A \cdot D) + A \cdot C \qquad (2)$$

Ze vztahu (1) vyplývá, že součin $A \cdot C \leq 21$ a součin $B \cdot D$ má na místě jednotek cifru 6. Z druhého vztahu plyne, že součin $B \cdot D \leq 19$ a součin $A \cdot C$ má na místě jednotek cifru 8. Odečtením rovnosti (2) od rovnosti (1) dostaneme rovnost $2176 - 1978 = 198 = 99 \cdot A \cdot C - 99B \cdot D$. Tuto rovnost dále upravíme a získáme vztah $2 + B \cdot D = A \cdot C$, tj. součin $A \cdot C$ je o 2 větší než součin $B \cdot D$.

Z těchto pěti podmínek plyne, že součin $A \cdot C$ je roven buď 8 (a součin $B \cdot D$ je o 2 menší, tedy 6) nebo 18 ($B \cdot D = 16$). Nyní si s trochou práce můžeme dosadit všechny varianty a zjistit tak výsledné cifry (tedy i hledaná čísla). Samozřejmě můžeme vymyslet další omezující podmínky jako například tu, že všechny cifry A, B, C, D jsou větší než 1. Tato podmínka vychází z toho, že kdyby jedno číslo mělo na místě desítek 1, tak i kdyby ostatní cifry byly 9, nikdy nedostaneme číslo větší než 1978 ($19 \cdot 99 = 1881 < 1978$).

Je-li $A \cdot C = 18$, pak můžou nastat tyto varianty:

1. $A = 2,\ C = 9$
   (a) $B = 2,\ D = 8$
   (b) $B = 9, D = 2$
2. $A = 3,\ C = 6$
   (a) $B = 4,\ D = 4$

3. $A = 6,\ C = 3$
   (a) $B = 4,\ D = 4$
4. $A = 9,\ C = 2$
   (a) $B = 2,\ D = 8$
   (b) $B = 9, D = 2$

Je ovšem vidět, že varianta 1 je obdobou varianty 4 a varianta 2 je obdobou varianty 3. Varianty nejsou shodné, nicméně výsledná dvojice čísel AB a CD je stejná.

Tabulka s jednotlivými propočty

A	B	C	D	$AB \cdot CD$	$BA \cdot DC$
2	2	9	8	2156	1958
2	8	9	2	2576	2378
3	4	6	4	2176	1978
2	2	4	3	946	748
2	3	4	2	966	768

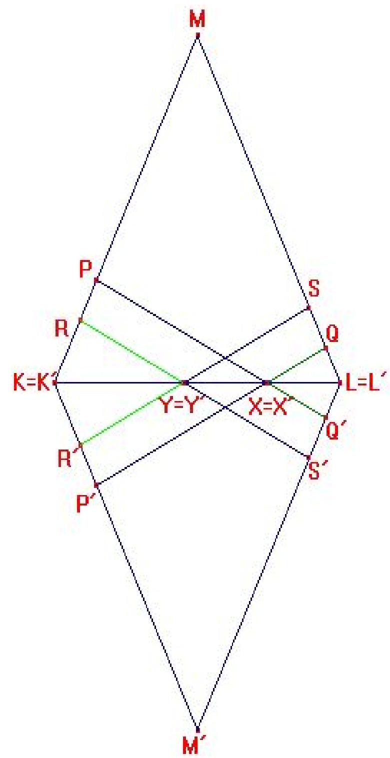
Zvýrazněný řádek označuje naše hledaná čísla. Hledaná čísla tedy jsou 34 a 64.

RS-IV-5-5

Zadání úlohy sice vybízí k tomu, abychom určili polohu bodu X tak, aby součet vzdáleností od ramen trojúhelníku byl minimální, v dalším textu je ale nápověda, že součet je konstantní. Přeformulujeme tedy úlohu na následující: *Dokažte, že součet vzdáleností libovolného bodu základny rovnoramenného trojúhelníku od jeho ramen je konstantní.*

Postupů řešení je jistě mnoho. Zkusme využít osové souměrnosti, tj. shodného zobrazení, tj. zobrazení, které zachovává délky úseček a velikosti úhlů (tedy také kolmost).

Zobrazíme-li trojúhelník KLM v osové souměrnosti podle osy KL, snadno nahlédneme (viz obr. 3), že pro libovolný bod X jeho základny je $|XQ| = |XQ'|$, proto $|XQ| + |XP| = |PQ'|$. Protože je $KM||M'L$ a také $PX||RY$ pro libovolné body X, Y základny, je pro libovolné dva body základny také $|PQ'| = |RS'|$. Tím je tvrzení dokázáno.



obr. 3