Řešení 1. série VI. ročníku kategorie STUDENT

RS-VI-1-1

Z definice šťastného čísla se dozvídáme, že takové číslo musí mít sudý ciferný součet (jinak by nemohly být jeho cifry rozděleny na dvě části se stejným ciferným součtem). Zvětšíme-li toto číslo, opět má mít sudý ciferný součet. Proto můžeme vypustit čísla končící jinou cifrou než 9.

Budeme tedy vyšetřovat první tři cifry. Jelikož hledáme nejmenší číslo, položíme první cifru rovnu 1. V dalším postupu jde jen o to nejprve „vyrobit malé“ šťastné číslo a pak už jen ověřit vlastnosti čísla o jedničku větší. Malé číslo zajistíme tak, že na místa stovek budeme postupně dosazovat čísla od 0 výš a na míst desítek takovou číslovku, aby součet prvních třech cifer byl 9, což je číslovka poslední.

šťastné číslo	šťastné číslo + 1
1089	1090
1179	1180
1269	1270
1359	1360
1449	1450

Až do čísla 1449 čísla nesplňují podmínku, že číslo o jedničku větší je také šťastné číslo. Nejmenší hledané šťastné číslo je tedy 1 449.

RS-VI-1-2

Stačí, když nejprve začneme měřit čas oběma hodinami zároveň. Když se dosypou sedmiminutové, ihned je znovu otočíme a začneme odměřovat druhých 7 minut. Ve chvíli, kdy se dosypou i jedenáctiminutové, je ze sedmiminutových odsypáno 4 minuty a zbývají ještě 3 minuty. Proto právě v tento okamžik můžeme začít odměřovat 3 minuty. Až se (podruhé) sedmiminutové hodiny dosypou, uplynuly 3 minuty.

RS-VI-1-3

V tomto problému nás budou zajímat pouze poslední cifry daných čísel. Pokud číslo n má být dělitelné 10, musí končit cifrou 0. Bude nás tedy zajímat, jaké jsou poslední cifry sčítanců ve vyjádření čísla n. Při násobení závisí poslední cifra jen na posledních cifrách jednotlivých činitelů. Proto se můžeme omezit jen na poslední číslici mocnin trojky, čtyřky a pětky.

Možné výsledky zapíšeme do tabulky. Použijeme zápis $\mod 10$ (čteme modulo 10), což je zbytek čísla po dělení 10, tedy poslední číslice.

k	$3^k \mod 10$	$4^k \mod 10$	$5^k \mod 10$
1	3	4	5
2	9	6	5
3	7	4	5
4	1	6	5
5	3	4	5
6	9	6	5

Vidíme, že se cifry periodicky opakují. Např. každá čtvrtá mocnina trojky končí číslicí 1 a každá druhá mocnina čtyřky končí číslicí 6. Tento cyklus se nikdy nenaruší, protože výsledek násobení pro poslední cifru záleží pořád jen na posledních cifrách.

Zbývá tedy zjistit, jaká z mocnin odpovídá exponentu 1986.

Protože $1986 = 4 \cdot 496 + 2$ (mohli bychom také psát $1986 \equiv 2 \mod 4$, je poslední číslice čísla 3^{1986} stejná jako poslední číslice čísla 3^2 a to je 9. Můžeme to také zapsat takto:

$$3^{1986} \equiv 3^2 \mod 10, \quad 3^2 \equiv 9 \mod 10.$$

Protože 1986 je sudé číslo, je

$$4^{1986} \equiv 4^2 \mod 10, \quad 4^2 \equiv 6 \mod 10.$$

Mocniny čísla 5 končí vždy zase na pětku, proto

$$5^{1986} \equiv 5 \mod 10.$$

Nakonec nám již nezbývá nic jiného, než sečíst konečné cifry a zjistit, zda je jejich součet číslo s konečnou cifrou nula. Protože

$$9 + 6 + 5 = 20 \equiv 0 \mod 10,$$

zjistili jsme, že číslo n je dělitelné deseti.

RS-VI-1-4

Hledáme číslo $n \in \mathbb{N}$. Číslo n má splňovat 3 podmínky: $\frac{n}{2} = x^2$, $\frac{n}{3} = y^3$, $\frac{n}{5} = z^5$, kde $x, y, z \in \mathbb{N}$. Tedy číslo n je dělitelné čísly 2, 3 a 5. A protože hledáme nejmenší takové přirozené číslo n, v jeho prvočíselném rozkladu budou právě jen mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Prvočíselný rozklad čísla n je tedy:

$$n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma,$$

kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$.

Jistě platí $\frac{n}{2} = 2^{\alpha-1}3^{\beta}5^{\gamma}$. Ale také $\frac{n}{2} = x^2 = x \cdot x$, tedy v prvočíselném rozkladu čísla x^2 jsou všechny mocniny prvočísel sudé. Proto je $\alpha - 1$ liché a β a γ jsou sudá čísla.

Podobně druhá podmínka $\frac{n}{3} = y^3$ nám říká, že všechny exponenty prvočísel v rozkladu čísla $\frac{n}{3} = 2^{\alpha}3^{\beta-1}5^{\gamma}$ jsou dělitelné třemi.

Z poslední podmínky obdobnou úvahou dostaneme, že exponenty v prvočíselném rozkladu čísla $\frac{n}{5} = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma-1}$ jsou dělitelné 5.

Dejme dohromady všechny podmínky pro čísla α, β, γ. Číslo α je liché, je dělitelné třemi a pěti, tzn. patnácti. Protože hledáme nejmenší takové číslo, je $\alpha = 15$.

Číslo β je sudé, je dělitelné pěti, tzn. deseti. Číslo o jedničku menší je dělitelné třemi. Nejmenší přirozené číslo dělitelné deseti je 10 a číslo o jedničku menší (9) je dělitelné třemi.

Nakonec číslo γ je sudé a dělitelné třemi, tzn. šesti. Číslo o jedničku má být dělitelné pěti. Nejmenší takové číslo je samozřejmě 5.

Tím je úloha vyřešena. Hledané přirozené číslo je $n = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6}$. Pro zajímavost a pro ty, kteří se vydali cestou postupného zkoumání „malých“ čísel je $n = 32\ 768 \cdot 59\ 049 \cdot 15\ 625 = 30\ 233\ 088\ 000\ 000$.

RS-VI-1-5

Označme si hledané prvočíslo jako p. Jako první můžeme vyloučit dvojku. Protože pak by i $p+4$ a $p+8$ byla sudá čísla, ale prvočísla jsou kromě dvojky všechna lichá.

Když za p dosadíme číslo 3, zjistíme, že podmínkám vyhovuje. Když však hledáme další prvočísla, nedaří se nám to. Proč?

Všechna prvočísla větší než 3, dávají po dělení třemi zbytek 1 nebo 2. Když přičteme k libovolnému prvočíslu, které po dělení trojkou dává zbytek jedna, číslo čtyři, dostaneme číslo, které může být prvočíslem. Když ale k takovému číslu přičteme osmičku, dostaneme číslo, která je dělitelné třemi, a tak nemůže být prvočíslem. Přehledně to můžeme zapsat takto: Jestliže je uvažované prvočíslo tvaru $p = 3k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, pak číslo $p + 8$ je dělitelné třemi, neboť $p + 8 = (3k + 1) + 8 = 3k + 9 = 3(k + 3)$.

Podobně dopadneme, i když budeme uvažovat prvočíslo tvaru $p = 3k+2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Protože pak $p + 4 = (3k + 2) + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ je zřejmě také dělitelné třemi.

Zjistili jsme tedy, že jediným hledaným prvočíslem je 3. Jiné neexistuje.