Řešení 4. série VI. ročníku kategorie STUDENT

RS – VI – 4 – 1

Důkaz provedeme sporem – tzn. budeme předpokládat, že daný výraz je racionální číslo . Rozdělíme řešení na dva případy:

a, $q \neq 1$

$\sqrt{n^2+n+1} = \frac{p}{q}, kde \quad p \in Z, q \in Z \wedge q \neq 0$ umocníme celou rovnici na druhou a dostaneme výraz $n^2+n+1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$. Pravá strana této rovnice je číslo přirozené ale levá strana této rovnice je číslo racionální kde p, q čísla nesoudělná a tedy i po umocnění je výraz na levé straně číslo desetinné a tedy nikdy nenastane rovnost – spor s předpokladem

b, $q = 1$

$\sqrt{n^2+n+1} = p, p \in Z$ opět umocníme celou rovnici na druhou a dostaneme výraz

$$n^2+n+1 = p^2$$
$$n^2+n+1-p^2 = 0$$

K řešení této kvadratické rovnice použijeme Viétovy vzorce

$$n_1+n_2 = -1$$
$$n_1 \cdot n_2 = 1-p^2$$

. Čísla n_1, n_2 jsou čísla přirozená a součet dvou přirozených čísel je číslo přirozené, v našem případě součtem vyšlo číslo „-1“ a to je není číslo přirozené – spor s předpokladem

Závěr: Číslo $\sqrt{n^2+n+1}$ je iracionální pro všechna přirozená čísla *n*

RS – VI – 4 – 2

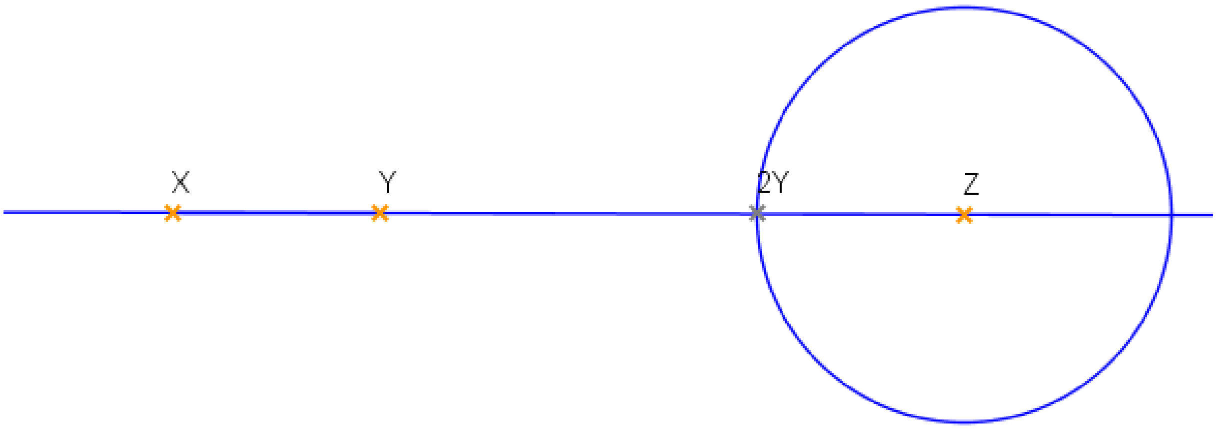
Ze zadání známe obrazy *x*, *y* a *z,* mezi kterými je vztah *x* < *y* < *z*. A dále platí *3y* = *z* + *x.*

Tento vztah si upravíme:

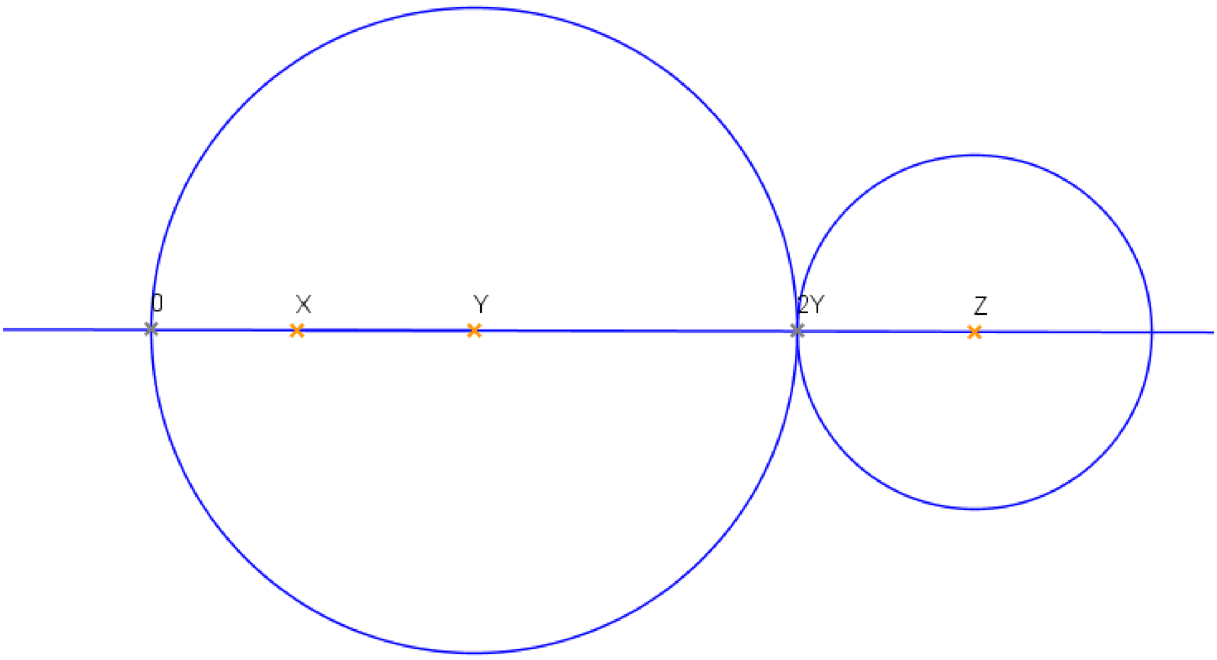
3y = *z* + *x*

y – *x* = *z* – *2y*

tj. $|xy| = |2yz|$, což znamená, že vzdálenost mezi *x* a *y* je stejná jako vzdálenost *2y* a *z.* Kružítkem tedy naneseme vzdálenost $|xy|$ na *z*.



Když nyní sestrojíme kružnici se středem v *y* o poloměru $|y2y|$, získáme obraz 0.



RS – VI – 4 – 3

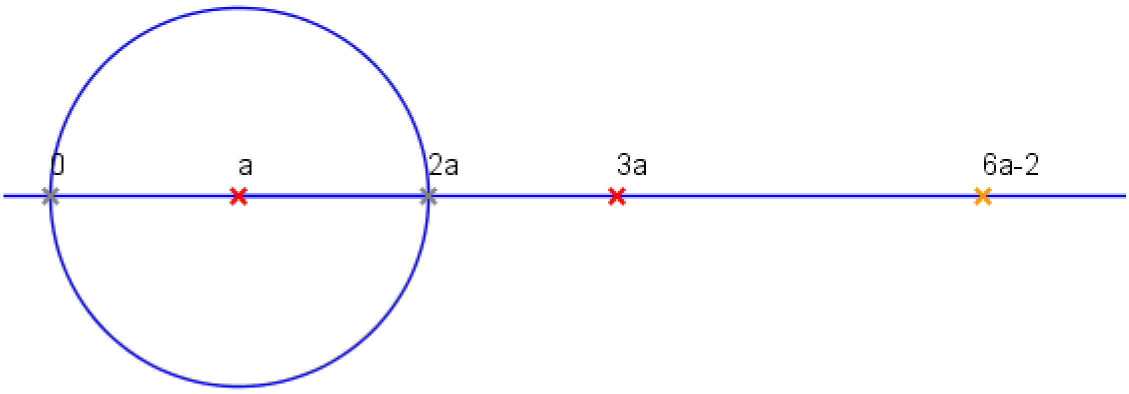
Ze zadání známe obraz *a,* obraz *3a* a obraz *6a – 2.* Naším úkolem je nalézt obrazy *0* a *1.*

Vzdálenost čísel *3a* a *a* si můžeme vypočítat takto:

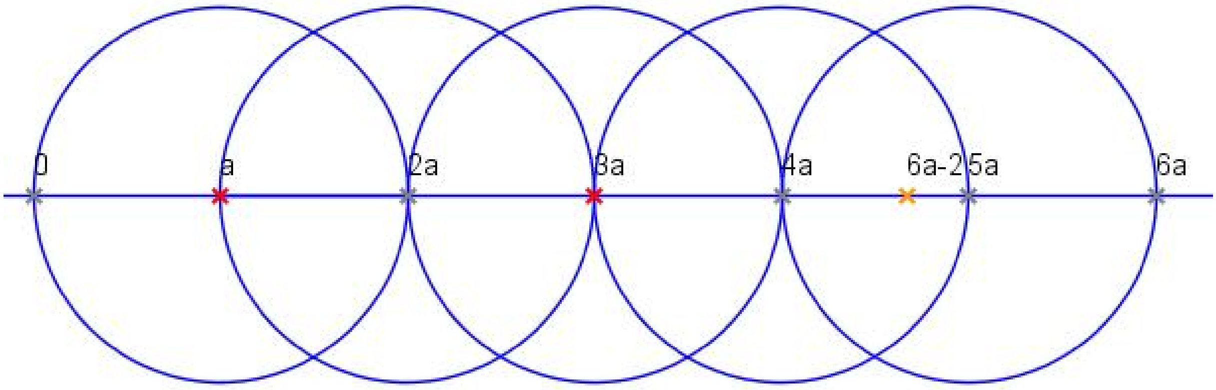
$$3a - a = 2a$$

Když najdeme střed této úsečky, získáme číslo *2a.*

Vzdálenost $|a2a|$ přeneseme pomocí kružnice $k(a, |a2a|)$ a získáme *0.*



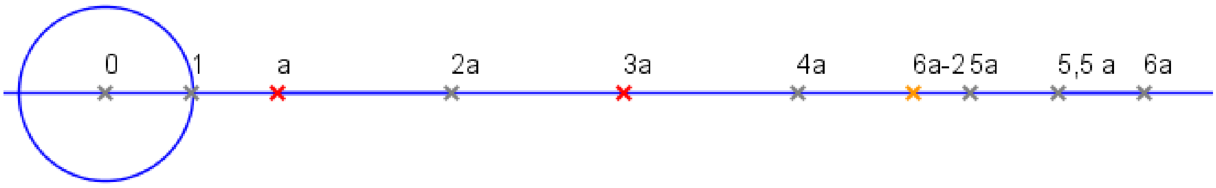
Vzdálenost $|a2a|$ budeme nanášet i „za“ bod *3a* směrem doprava. Získáme body *4a, 5a, 6a.*



Vzdálenost bodů *6a* a *6a – 2:*

$6a - (6a - 2) = 6a - 6a + 2 = 2$

Když sestrojíme střed úsečky *6a* a *6a – 2*, získáme velikost 1. Tu přeneseme na *0* a získáme hledanou *1.*



RS – VI – 4 – 4

Ze zadání známe obraz *0*, obraz aritmetického průměru čísel *a,b*, obraz aritmetického průměru čísel *a, b+a.*

Nejdříve najdeme obraz bodu *a*. Využijeme znalosti aritmetického průměru dvou čísel *a* a *b*, který vypočítáme:

$$\frac{a+b}{2},$$

což je číslo *A(a,b).*

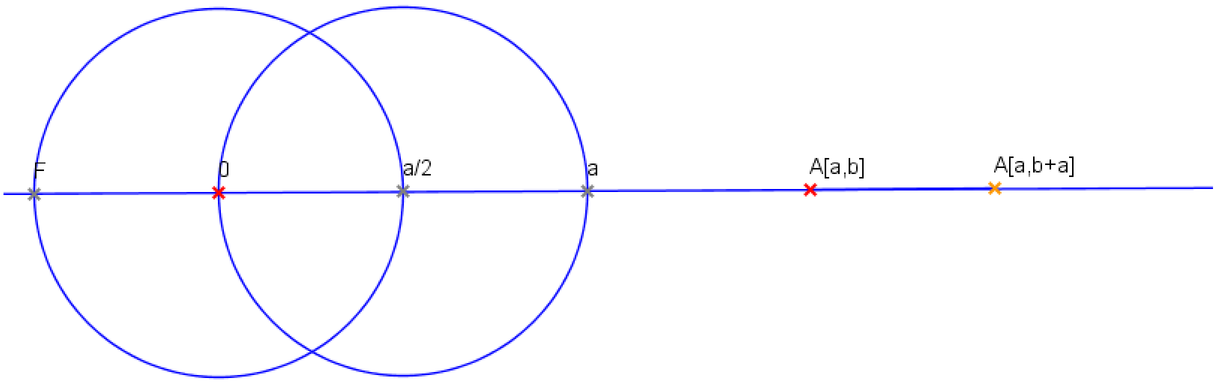
Stejně tak číslo *A(b+a,a)* můžeme pomocí aritmetického průměru vyjádřit jako:

$$\frac{(b+a)+a}{2}=\frac{2a+b}{2}$$

Vzdálenost těchto dvou čísel A(*a*, *b*+*a*) a A(*a*, *b*) na číselné ose vypočítáme:

$$\frac{2a+b}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{2a+b-a-b}{2}=\frac{a}{2}.$$

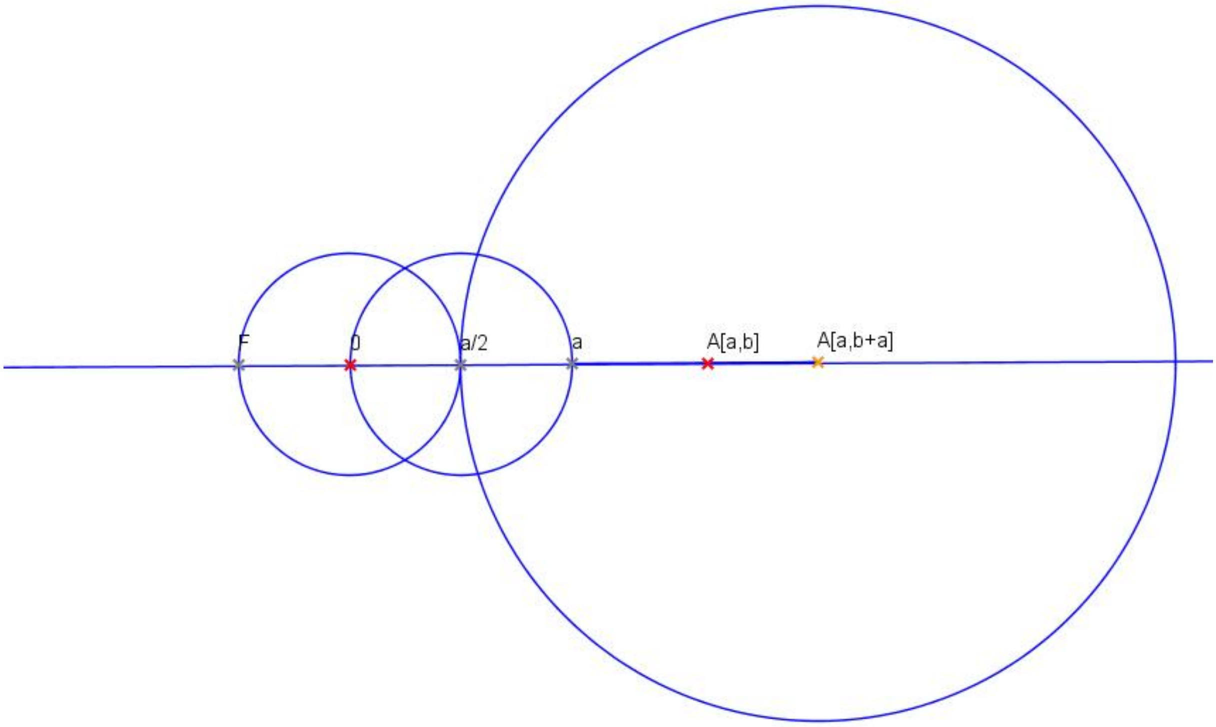
Tuto vzdálenost $\frac{a}{2}$ naneseme dvakrát za sebou na *0* a získáme bod *a.*



Lépe si vyjádříme číslo A(*a*, *b*+*a*) jako součet *a* a $\frac{b}{2}$

$$\frac{a+(b+a)}{2}=\frac{2a+b}{2}=\frac{2a}{2}+\frac{b}{2}=a+\frac{b}{2}$$

To znamená, že vzdálenost mezi *a* a A(*a, b*+*a*) je rovna $\frac{b}{2}$. Když tuto vzdálenost naneseme „napravo“ od A[*a, b*+*a*], získáme bod *b.*



RS – VI – 4 – 5

Dokažte, že rovnice $x^3+x^4=7$ nemá řešení v oboru celých čísel.

1. Vytkneme z levé strany rovnice x .
   $x(x^2+x^3)=7$
2. Vydělíme celou rovnici x.
   $x^2+x^3=\frac{7}{x}$

Na levé straně rovnice nám vždy vyjde celé číslo ($x\in Z$). Na pravé straně jen v případě, že za x dosadíme 7, nebo 1.
Ani v jednom případě však rovnice neplatí.