Milý příteli,

dostal se Ti do rukou první ročník matematického korespondenčního semináře KOS SEVERÁK. Seminář je určen pro studenty středních škol všech typů. Ročník nerozhoduje. Je pořádán katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J.E. Purkyně. Princip korespondenčního semináře spočívá v tom, že budeš poštou dostávat matematické problémy a po určité době nám zašleš své řešení. My jej přečteme a s komentářem a s novým zadáním Ti jej opět vrátíme. Průběžně budeš moci porovnat své výsledky s ostatními studenty nejen z Ústeckého kraje. Na konci školního roku budou nejúspěšnější řešitelé odměněni věcnými cenami. Úspěch v KOSu bude zúročen i při přijímacím řízení.

V průběhu školního roku vyjde 5 sérií po 5 příkladech. Za každý příklad může řešitel získat 6 bodů. Za jedno kolo tedy 30 bodů a v daném ročníku 150 bodů. Do semináře se můžeš zapojit kdykoli. Jen musíš počítat s tím, že se pořadí počítá průběžně a celý rok. Svá řešení zasílej na uvedené adresy vždy do uvedeného termínu. Řešení jednoho příkladu uváděj na zvláštní papír formátu A4 a označ ho svým jménem a příjmením, školou (název a město), třídou (třída/počet ročníků, tj. když jsi např. v septimě osmiletého gymnázia, napíšeš 7/8) a číslem onoho příkladu. Toto opatření požadujeme z toho důvodu, že jednotlivé příklady opravují různí lidé. Mohlo by se tak při nesprávném označení stát, že se nějaké řešení nedostane k tomu správnému člověku. Svá řešení můžeš zasílat i e-mailem a to buď ve Wordu nebo v TeXu a 602. Do semináře budou zařazovány problémy velmi jednoduché i velmi složité. Některé vyřešíš hned, jiné možná nevyřeší nikdo ze účastníků. Neobávej se poslat jakékoli, třeba jen částečné řešení. Vždy měj ale na paměti, že nejcenější je vždy Tvoje **cesta** k výsledku. Pokud tedy napíšeš jen řešení, nic jsme se nedověděli. Proto se snaž vždy své řešení okomentovat, vysvětlit nebo dokázat. Stručnost tentokrát nebude výhodou.

Zadání úloh najdeš také na internetu na adrese

www.ujep.cz/ujep/pf/kmat/home/page2/KoS.htm.

Přejeme Ti hodně zábavy při řešení problémů korespondenčního semináře KOS.

kontaktní adresa:

KOS STUDENT	e-mail:KOS@pf.ujep.cz
Katedra matematiky PF UJEP	heslo: STUDENT
České mládeže 8	
400 96 Ústí nad Labem	

1. série

Svá řešení zasílej na uvedené adresy do **29.října 2002**

Vážení přátelé,

jmenuji se Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik a mám na Vás prosbu. Pocházím z jednoho neobyčejného, pozoruhodného, ale přitom zcela zapomenutého rodu v Čechách. Moji předkové byli velmi učení a znalí, zejména v matematice. Je proto s podivem, že se o nich ani světová ani česká literatura nezmiňuje.

Rozhodl jsem se jejich život a dílo ukázat světu alespoň dnes. Pozdě, ale přece! Největším zdrojem informací jsou pro mne jejich spisy, které zahrnují i jejich korespondenci s velikány své doby i s učiteli malých českých škol. Od počátku se nemohu zbavit pocitu, že jejich dopisy jsou v podstatě určeny nám. Obsahují mimo jiné mnoho úloh, které jsou přinejmenším zajímavé.

Předávám Vám tímto alespoň část úžasného vědeckého dědictví, které mi zanechali moji předci z rodu Kosů.

S pozdravem a v hluboké úctě Váš
Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik

S-I-1-1

Jednou mne mé toulky zavedly do nedalekého Berlína. Psal se rok 1750. V té době působil na Berlínské akademii švýcarský učenec Leonhard Euler. Kromě toho, že vystudoval teologii a orientální jazyky, věnoval se všem oblastem tehdejší matematiky a také jejím aplikacím. Navštívil jsem tedy zdejší akademii, abych mohl tohoto velikána poznat. Ale hlavně jsem právě pracoval na zajímavé teorii o konvexních mnohostěnech. Chtěl jsem s Eulerem diskutovat o této teorii, ale velký matematik mě zaskočil. „To je velmi zajímavé, kolego, co mi tady říkáte. Škoda, že jste nemohl přijít dříve. Mohl jste se alespoň podílet na publikaci, která právě nedávno vyšla. Popisuji v ní tzv. Eulerovu větu, která by vás mohla zajímat. Tvrdím, že u konvexního mnohostěnu součet počtu vrcholů v a počtu stěn s se rovná součtu čísla 2 s počtem jeho hran h." Tedy

$$v + s = h + 2.$$

Navrhl jsem, že bychom těmto mnohostěnům mohli říkat eulerovské. A tak jsem i já nakonec přispěl svým dílem k veliké teorii. Vy nevíte, k čemu nám taková věta může být? Podívejme se na mnohostěny pravidelné. Známe prav. čtyřstěn, prav. šestistěn, prav. osmistěn, prav. dvanáctistěn a prav. dvacetistěn. A kdybychom hledali ještě další, neuspěli bychom. (Zkoušel jsem to opravdu velice dlouho.) Z Eulerovy (a pochopitelně především mojí) věty totiž plyne, že jich existuje právě jen těchto pět. A jak této věty ještě můžeme využít? Co takhle se něco dozvědět o zmiňovaných mnohostěnech? Třeba dvanáctistěn. Zkuste pomocí Eulerovy věty spočítat, kolik má vrcholů a kolik má hran. Přidám Vám navíc ještě jeden úkol. Nejdříve Vám však musím upřesnit pojem stupeň vrcholu. Je to počet hran vystupujících nebo vstupujících z daného vrcholu. A nyní! Pokuste se vypočítat, jaký je stupeň jeho vrcholů a jaké pravidelné k-úhelníky tvoří jeho stěny.

(Nápověda: Pozor! Musíte si uvědomit vztah počtu hran s počtem vrcholů a stupněm vrcholu a vztah počtu hran s počtem úhlů jedné stěny a počtem stěn.)

S-I-1-2

Onehdá jsem se vrátil ze své cesty domů a bylo mi tam smutno. Napadlo mne, že kdyby na mě doma vždy někdo čekal, bylo by to lepší. A tak jsem se rozhodl, že si konečně najdu manželku. Léta jsem na to už rozhodně měl. V těchto záležitostech jsem nebyl právě zběhlý. Vydal jsem se proto do místního salónu. Zjistil jsem, že „volných“ slečen je 20, ale já jsem chtěl jen jednu – samozřejmě tu nejlepší, tedy tu která má nejvíc pozitivních vlastností. Podařilo se mi zjistit, že 6 slečen umí výborně vařit, 13 z nich ovládá dovednosti aritmetické, 6 slečen má překrásné oči a 9 dam krášlí zlaté šperky. U těch šesti kuchařinek jsem byl na obědě a zjistil jsem, že 2 z nich mají krásné oči, 3 bravurně počítají a o dvou z nich se nic dalšího říct nedá. Žádná z kuchařinek nemá ani jeden šperk. Dále jsem se dozvěděl, že 3 slečny s prstenem mají krásné oči, 5 matematiček se může chlubit svým zlatem, 4 slečny při řešení rovnic mohou klopit nádherné oči. A teď bych potřeboval poradit, kterou ze slečen mám požádat o ruku, aby to pro mě bylo co nejvýhodnější. Myslíte, že nějaká z nich bude mít všechny čtyři jmenované vlastnosti? Anebo alespoň tři? Bude jediná nebo budu mít ještě na výběr? Nebo budou mít nanejvýš dvě z těchto vlastnosti? To doufám, že ne.

S-I-1-3

V únoru roku 1853 jsem navštívil francouzského spisovatele Jula Verna, abych mu poblahopřál k jeho 25. narozeninám, které slavil osmého dne tohoto měsíce. Mistr právě dokončoval svůj román *Dvacet tisíc mil nad zemí.*

Požádal mne, zda bych si mohl jeho rukopis přečíst a jako kolega vyjádřit svůj názor. Dílo bylo ve velmi pracovní podobě, ale co jsem opravdu nemohl přehlédnout, byla konstrukce jeho fantastického výtahu. Popisoval totiž, že výtah bude jezdit vždy jen o šest pater nahoru a o tři patra dolu. Nápad se mi líbil, ale povídám mu: „Proč jste takový troškař, kolego? Neobávejte se a nechte svůj výtah jezdit o pět pater nahoru!“ Možná jste překvapeni, že jsem parametr vlastně snížil, ale ve skutečnosti je můj výtah daleko lepší. Pochopitelně jsem mistrovi okamžitě podal matematický důkaz svého tvrzení. Myslím ale, že Vám nebude činit žádné potíže provést si důkaz sami.

Vysvětlete, proč je Kosův návrh výtahu „lepší“ než návrh spisovatele J. Verna. Své tvrzení dokažte.

Mistr vyslechl mnohé mé připomínky a na jejich základě svůj román zcela přepracoval. Později vyšel pod názvem *Dvacet tisíc mil pod mořem.*

S-I-1-4

U příležitosti mých kulatých narozenin jsem se rozhodl uspořádat malou soukromou oslavu. Pozval jsem na ni všechny významné matematiky, fyziky a astronomy. Jako vždy se ode mne očekávalo originální přivítání. Ani tentokrát jsem mé přátele nezklamal. S důkladností mně vlastní vytvořil jsem důmyslný hlavolam. Jeho řešení bylo vstupenkou na mou oslavu. Velmi mne překvapilo, že bylo úspěšných hostů tak málo! Posuďte sami pravděpodobnost správného řešení.

Zadání hlavolamu: Mějme deset různě barevných předmětů a deset různých zásuvek pro ně určených. (Do každé zásuvky patří určitý předmět.) Úkolem je uložit předměty na správné místo. Podmínkou však je, ukládat je ve správném pořadí. Nápovědou je, že zelený předmět patří do třetí zásuvky a červený předmět má být uložen jako devátý.

Vypočítejte s jakou pravděpodobností najdete správné řešení hlavolamu, máte-li jediný pokus.

Pozn.: Pravděpodobnost je, zhruba řečeno, míra možnosti. Vyjadřuje se poměrem počtu všech příznivých jevů ku počtu všech možných jevů (předpokládámeli, že je tento počet konečné číslo).

S-I-1-5

Rok 1840 byl pro mne nad míru úspěšný. Začalo to setkáním s německým fyzikem Georgem Simonem Ohmem (1789 - 1854). Tehdy jsme společně pracovali na teorii o základním a vyšším harmonickém kmitání v oboru fyziologické akustiky. Později jsem byl nucen odjet do Anglie a mé místo zaujal

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (31. 8. 1821 - 8. 9. 1894).

Pozval mne totiž Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), neboť se mnou chtěl konzultovat svou teorii o řešitelnosti algebraických rovnic pátého stupně.

Cestou zpět do Vídně jsem měl tu čest setkat se s císařem rakouským a králem českým Ferdinandem I. (1793 - 1875). Vladař se mi svěřil s problémem zaměstnavatelů, kteří nerespektovali jeho nařízení z roku 1839, kde stanovil, že minimální věk dělníků bude 12 let a maximální denní pracovní doba bude 13 hodin. Neubránil jsem se výkřiku: „Tak jste císař nebo ne?!“ Ještě tu noc se daly věci do chodu. Nemohl jsem se celé záležitosti věnovat a proto zákon nabyl definitivní platnosti až po dvou letech.

Byl jsem totiž pozván do Londýna na ceremoniál udělování královských řádů významným osobnostem. Před samotným ceremoniálem byla uspořádána velkolepá slavnost. Její součástí byl mimo jiné šermířský turnaj. Účastníci klání spolu soupeřili systémem „každý s každým“, kde byl vždy jeden vítězem a jeden poraženým. Zaujalo mne, že ačkoliv soupeřů stále přibývalo, mohl jsem je v mysli seřadit vždy tak, že první porazil druhého, druhý třetího, ten zas čtvrtého až na konec předposlední porazil posledního. Celou situaci jsem sformuloval do obecného tvrzení o n soupeřích. Okamžitě jsem se pustil do důkazu. Byl jsem touto nádhernou matematickou hrou tak zaujat, že jsem zcela opomenul samotné předávání královských řádů. Ale netruchlil jsem, odvážel jsem si z Anglie nový poznatek ze světa matematiky. Rád bych se s Vámi o něj podělil. Avšak neprozradím Vám jej! Nejlepším zážitkem pro Vás bude, odhalíte-li můj důkaz sami.