

Milý příteli,

dostal se Ti do rukou první ročník matematického korespondenčního semináře KOS SEVERÁK. Seminář je určen pro studenty středních škol všech typů. Ročník nerozhoduje. Je pořádán katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J.E. Purkyně. Probíhá pod záštitou ústecké pobočky JČMF a je podporován Městem Ústí nad Labem. Princip korespondenčního semináře spočívá v tom, že budeš poštou dostávat matematické problémy a po určité době nám zašleš své řešení. My jej přečteme a s komentářem a s novým zadáním Ti jej opět vrátíme. Průběžně budeš moci porovnat své výsledky s ostatními studenty nejen z Ústeckého kraje. Na konci školního roku budou nejúspěšnější řešitelé odměněni věcnými cenami. Úspěch v KOSu bude zúročen i při přijímacím řízení.

V průběhu školního roku vyjde 5 sérií po 5 příkladech. Za každý příklad může řešitel získat 6 bodů. Za jedno kolo tedy 30 bodů a v daném ročníku 150 bodů. Do semináře se můžeš zapojit kdykoli. Jen musíš počítat s tím, že se pořadí počítá průběžně a celý rok. Svá řešení zasílej na uvedené adresy vždy do uvedeného termínu. Řešení jednoho příkladu uváděj na zvláštní papír formátu A4 a označ ho svým jménem a příjmením, školou (název a město), třídou (třída/počet ročníků, tj. když jsi např. v septimě osmiletého gymnázia, napíšeš 7/8) a číslem onoho příkladu. Toto opatření požadujeme z toho důvodu, že jednotlivé příklady opravují různí lidé. Mohlo by se tak při nesprávném označení stát, že se nějaké řešení nedostane k tomu správnému člověku. Svá řešení můžeš zasílat i e-mailem a to buď ve Wordu nebo v TeXu a 602. Do semináře budou zařazovány problémy velmi jednoduché i velmi složité. Některé vyřešíš hned, jiné možná nevyřeší nikdo ze účastníků. Neobávej se poslat jakékoli, třeba jen částečné řešení. Vždy měj ale na paměti, že nejcenější je vždy Tvoje **cesta** k výsledku. Pokud tedy napíšeš jen řešení, nemůžeme posoudit, jak jsi na řešení přišel. **Plný počet bodů může získat jen úplné řešení s úplným vysvětlením.** Proto se snaž vždy své řešení okomentovat, vysvětlit nebo dokázat. Stručnost tentokrát nebude výhodou.

Zadání úloh najdeš také na internetu na adrese

www.ujep.cz/ujep/pf/kmat/home/page2/KoS.htm.

Přejeme Ti hodně zábavy při řešení problémů korespondenčního semináře KOS SEVERÁK.

kontaktní adresa:
KOS STUDENT
Katedra matematiky PF UJEP
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail:KOS@pf.ujep.cz
heslo: STUDENT

2. série

Svá řešení zasílejte na uvedené adresy do **13. prosince 2002**

Vážení přátelé,

jmenuji se Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik a mám na Vás prosbu. Pocházím z jednoho neobyčejného, pozoruhodného, ale přitom zcela zapomenutého rodu v Čechách. Moji předkové byli velmi učení a znalí, zejména v matematice. Je proto s podivem, že se o nich ani světová ani česká literatura nezmiňuje.

Rozhodl jsem se jejich život a dílo ukázat světu alespoň dnes. Pozdě, ale přece! Největším zdrojem informací jsou pro mne jejich spisy a deníky, které zahrnují i jejich korespondenci s velikány své doby i s učiteli malých českých škol. Od počátku se nemohu zbavit pocitu, že jejich obsah je v podstatě určen nám. Obsahují mimo jiné mnoho úloh, které jsou přinejmenším zajímavé.

Předávám Vám tímto alespoň část úžasného vědeckého dědictví, které mi zanechali moji předci z rodu Kosů.

*S pozdravem a v hluboké úctě Vás
Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik*

S-I-2-1

Podrobným studiem korespondence svého dědečka Aloise Kosa, nabyt jsem přesvědčení, že byl dobrým přítelem německého fyzika a matematika Alberta Einsteina. Objevil jsem totiž dopis datovaný rokem 1910 adresovaný právě Albertu Einsteinovi. Dědeček v něm popisuje velmi osobní zážitek, který se jemu a jeho ženě, mé babičce Alžbětě přihodil toho roku z jara. Samotná příhoda je velmi zajímavá. Posudte sami:

Milý kolego,

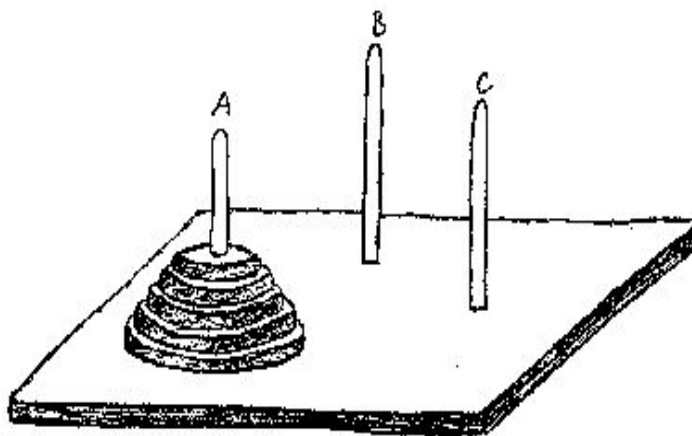
nemohu přejít tuto humornou událost, aniž bych Vám o ní nevyprávěl. Když jsem se svou chotí cestoval vlakem do Drážďan, přisedl si do našeho kupé velmi výřečný muž. Byl to bohatý obchodník a vykládal mi mnoho o své práci a o svých služebních cestách. Nejvíce mne zaujala jeho příhoda o podivném obchodu, kterou mi vyprávěl: „To by člověk nevěřil, co všechno se může stát. Představte si, že ke mně dnes přišel jeden můj známý a nabídl mi výborný obchod. Chceš-li, pravil, přinesu ti zítra půl miliónu zlatých. Zeptal jsem se ho, co za to bude chtít. Odpověděl, že za těch půl miliónu zlatých chce pouze jediný desetihalář. Když přistoupím na ten podivný obchod, přinese mi další den opět půl miliónu zlatých a bude za ně chtít poplatek dvakrát větší než předtím, tedy 20 halářů. Ten člověk mi chce třetí den přinést dalších 500 000 zlatých a nechce za to nic než dvojnásobek poplatku z předešlého dne, pouhých 40 halářů. A to chce dělat každý den, po celých 28 dní. Jen to si vyhrazuje, že se naše smlouva musí vzájemně plnit nejméně 28 dnů, dřív ani jeden, ani druhý z nás nesmí od plnění svého závazku ustoupit. To asi neví, co s penězi, nebo se zbláznil, když si vymyslel takovýhle obchod. Tak se musím do zítřka vrátit domů, abych jeho „půlmiliónovou“ návštěvu nepromeškal.“ Jak jsem svého spolucestujícího vyslechl, hned mi bylo jasné, oč tu běží. Muž, který mu obchod nabídl, byl pěkně mazaný a vychytralý. Samozřejmě jsem na to obchodníka upozornil. Nebylo těžké mu vysvětlit, proč by se do tohoto obchodu neměl pouštět.

Dokázali byste mu to zdůvodnit i Vy?

S-I-2-2

Můj dědeček Alois měl jednu tetu. Jmenovala se Evelína a byla údajně velmi krásná. Byla, jak bych tak řekl, důvěrnou přítelkyní francouzského matematika E. Lucase. Tento matematik zaplavoval už v minulém století různé obrázkové časopisy řadou vtipných příspěvků, z nichž mnohé jsou oblíbeny dodnes. Rád dával některým svým hádankám exotický rámeček a své články do obrázkových časopisů podepisoval žertovným pseudonymem *mandarin Claus*. Z deníků a poznámek mé prarabiny Evelíny je naprosto zřejmé, že byla přinejmenším spoluautorkou těchto zábavných úloh. Stejným pseudonymem byl také r. 1890 podepsán článek ve francouzském časopise *Cosmos*, v němž Lucas a Evelína předložili čtenářům novou matematickou hříčku. Úloha se brzo rozletěla po světě a je dnes známa pod názvem *hanojská věž*. Pokuste se tuto krásnou úlohu vyřešit.

Představme si prkno s třemi kolíky A, B, C, jak schematicky ukazuje obrázek. Na jednom z kolíků (na obrázku je označen písmenem A) jsou navlečeny kruhové destičky opatřené ve středu otvorem, takže tvoří jakousi pyramidu. Úkolem nyní je přemístit všechny kruhové destičky z kolíku A na kolík B, přičemž smíme přemísťovat vždycky jen jednu destičku, dále smíme klást menší destičku na větší (nikoli obráceně). Je ovšem dovoleno používat všech tří kolíků A, B, C.



Zjistěte kolik musíme minimálně vykonat přesunů, má-li hanojská věž n destiček a svoje tvrzení dokažte (nápopověda: matematickou indukci).

S-I-2-3

Při mém pátrání po významných osobnostech mého rodu, dobral jsem se až do vzdálené minulosti 16. století. Objevil jsem příručku, kterou psal můj prapraděd Radúz z Kosic. Byl učencem na slovo vzatým. Zabýval se mnohými vědami tehdejší doby, mimo jiné i architekturou. A právě pro studenty architektury byla určena jeho příručka. Kromě jiných úloh obsahuje i tuto (přeformuloval jsem ji do dnešního jazyka):

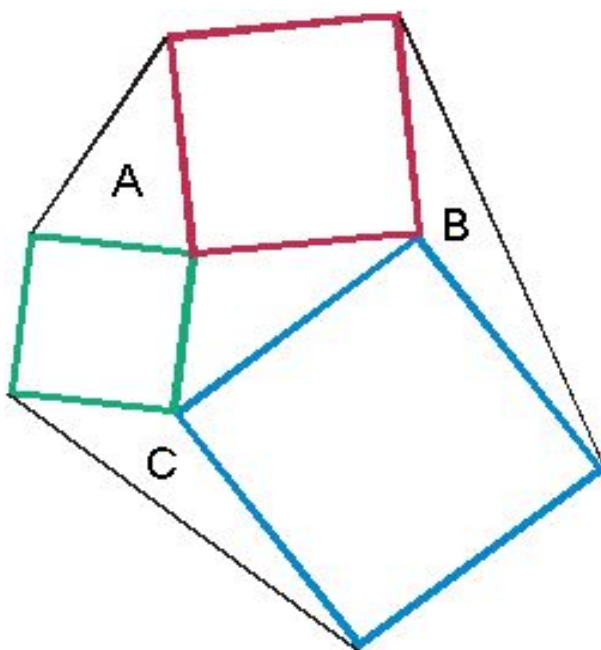
Sestrojte tečnu k dané kružnici z daného bodu, který leží vně kružnice, neznáte-li střed kružnice a můžete-li použít ke konstrukci tečny pouze pravítko.

S-I-2-4

V této knize mne zaujala ještě jedna úloha. Tři muži sobě postavili domy s podstavou tvaru čtverce tak, že mezi nimi vznikl trojúhelníkový dvůr.

Vznikly tak i tři trojúhelníkové zahrady (viz obr). Problém nastal tehdy, když se rozhodovalo, která zahrada připadne ke kterému domu. Dohodli se, že ta nejmenší zahrada k nejmenšímu domu a největší zahrada k největšímu domu, neboť to odpovídá postavení oněch mužů. Ovšem po důkladném prozkoumání zjistili, že všechny tři zahrady zaujímají stejnou plochu. Stalo se tak, že nejvýznamnější muž mohl sobě vybrati zahradu dle svého uvážení, po něm pak další a na závěr ten s nejnižším postavením. Nám však zůstává úkol nelehký!

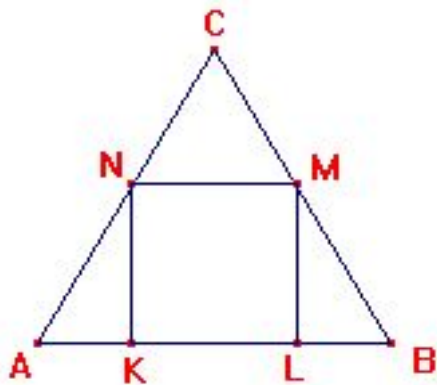
Dokaž, že ačkoli si postavili domy o libovolném obsahu podstavy, zahrady, které vznikly, mají vždy stejnou plochu.



S-I-2-5

V roce 1770 se objevil v *Dámských listech*, které pravidelně četla má praprababička Kateřina, velmi zajímavý článek. Psalo se v něm, že jakási dáma žalovala svou švadlenu, neboť se domnívala, že zbůhdarma plýtvala látkou. Ona švadlena měla vystříhnout obdélníkový šátek z látky ve tvaru rovnostranného trojúhelníku. Provedla to tak, jak je zachyceno na obrázku. Bránila se, že vystříhla ten největší obdélník, který byl možný. Kateřinina choť Ctirada tato událost z profesních důvodů velmi zaujala. Zabýval se totiž

právě maximem a minimem funkce. Nabídl se proto jako odborný konzultant k soudnímu přelíčení. Díky jeho důkazu švadlena spor vyhrála a stala se tak velmi vyhledávanou a uznávanou mistriní svého řemesla. Naneštěstí se ale Ctiradův důkaz nezachoval. Byl bych Vám vděčen, kdybyste mi s ním mohli pomoci.



Nechť trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte, že obdélník s největším obsahem umístěný do tohoto trojúhelníku, je právě vepsaný (tj. všechny čtyři vrcholy leží na některé z jeho stran) čtverec.