

5. série III ročníku kategorie STUDENT

Řešení zasílejte do 22. května 2005

Vážení přátelé,

jmenuji se Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik. Pocházím z jednoho neobyčejného, pozoruhodného, ale přitom zcela zapomenutého rodu ze Severních Čech. Moji předkové byli velmi učení a znalí zejména v matematice. Je proto s podivem, že se o nich ani světová ani česká literatura nezmiňuje.

Rozhodl jsem se jejich život a dílo ukázat světu alespoň dnes. Pozdě, ale přece! Největším zdrojem informací jsou pro mne jejich spisy a deníky, které zahrnují i jejich korespondenci s velikány své doby i s učiteli malých českých škol. Od počátku se nemohu zbavit pocitu, že jejich obsah je v podstatě určen nám. Obsahují mimo jiné mnoho úloh, které jsou přinejmenším zajímavé.

Píší vám již třetím rokem. Rozhodl jsem se proto, že bych měl důkladněji a systematictěji představit práci svých předků. A jak jinak se s ní můžete důkladněji a systematictěji seznámit, než že půjdete v jejich šlépějích a budete řešit problémy, se kterými si i oni kdysi lámali své hlavy.

S pozdravem a v hluboké úctě Váš

Prof. RNDr. Alois Kos, CSc., diplomovaný matematik

Při úklidu školní půdy jsme s kolegy objevili starou složku se zajímavými materiály z 15. století. Mezi těmito materiály byla i matematická soutěž pro studenty tehdejších škol. Tuto soutěž vám předávám. Znění úloh jsem přepsal do vámi srozumitelného textu. Řešte ji stejně jako oni. Uvědomte si, že v té době nebyly ještě vymyšleny kalkulačky ani vyšší technologie, proto i vy si musíte vystačit pouze s tabulkami, které už v té době existovaly.

S-III-5-1

Do trojúhelníku jsou vepsány tři kružnice dotýkající se navzájem, přičemž každá strana trojúhelníku se dotýká dvou kružnic. Jaký je obvod trojúhelníku, je-li poloměr každé kružnice roven 3?

S-III-5-2

Pro jaká reálná čísla x, y platí tato rovnost:

$$22255^x + 55522^y = 77777$$

S-III-5-3

V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme K, L paty výšek z vrcholů A, B . Určete velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech B, C , je-li $\alpha = 40^\circ$ a jsou-li poloměry kružnic vepsaných trojúhelníku KLC a ABC v poměru 1:2.

S-III-5-4

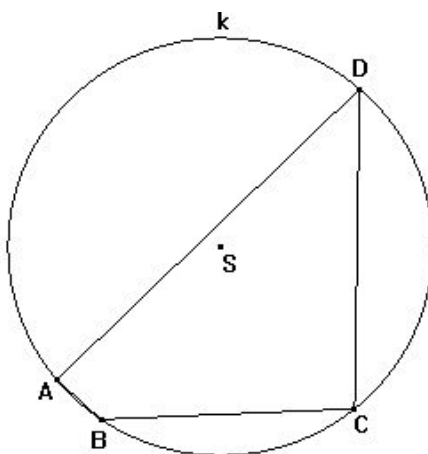
Nalezněte všechny funkce $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, pro které platí:

$$v \cdot f(u) + u \cdot f(v) = f(u + v), \quad \text{kde } u, v \in \mathbf{R}.$$

Pomůcka: Samotné u, v jsou předpisy pro libovolné funkce a $f(u)$ a $f(v)$ jsou funkční hodnoty. Úloha se řeší vhodným dosazováním za u a v .

S-III-5-5

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r . Do této kružnice je vepsán čtyřúhelník $ABCD$. Vrcholy čtyřúhelníku dělí kružnici na oblouky, jejichž délky jsou v poměru 1:5:7:11. Vyjádřete obsah tohoto čtyřúhelníku pomocí poloměru r .



Doufám, že jste si s úlohami hravě poradili, a že i v 15. století byste v matematické soutěži obstáli.

A. K.

Poznámka autorů: Upozorňujeme, že veškerá podobnost našich postav a jejich osudů se skutečnými lidmi a osudy je čistě náhodná.