

2. série IV. ročníku kategorie STUDENT Řešení zasílej do 25. listopadu 2005

Celý den jsem se nemohl dočkat, až zase půjdeme spát. Snad náš sen bude pokračovat. Čeká nás rituál přijetí a snad se setkáme se samotným Pythagorem.

Děda se dost divil, že chceme jít spát hned po večeři. Obvykle jsme ho přemlouvali, abychom mohli zůstat vzhůru co nejdéle. Jenže tentokrát je vše jinak.

Leželi jsme v postelích a zkoušeli usnout. Soustředil jsem se sebevíc, ale nějak to nešlo. „Doubravko, spíš?“

„Nějak mi to nejde. Tak moc chci usnout, že pořád čučím do stropu.“

„Já taky. Nevíš, jak to, že jsme se mohli spolu u zkoušek bavit? A jak to, že rozumíme řecky?“

„Taky jsem nad tím přemýšlela. Myslím, že by to mohlo být tím, že ve snu jsou důležité myšlenky a ne slova. Je možné, že je dokážeme vysílat a přijímat, takže není vidět, vlastně slyšet, že spolu mluvíme, a taky to vypadá, že umíme řecky.“

„Na tom něco je. Ale jak teď usneme?“

„Nevím, počítání oveček mi nikdy nezabíralo.“

„A co počítání sloupů kolem atrie?“

„Proč byste chtěli počítat sloupy kolem atrie?“

„Jejda, ahoj Sokrate! No, to nic.“ Z ničeho nic jsme se objevili v paláci. Sláva.

„Kde jste byli takovou dobu? Málem jste promeškali rituál přijetí.“

Všichni jsme se shromáždili ve velkém atriu. Na pódiu byl připraven stolec pro představené školy a sedátka pro nás - nové členy. Starší studenti seděli v hledišti. Jako první přišel konferenciér. Poklonil se nám a my jsme mu jeho pozdrav oplatili. Znělým hlasem uvedl představenstvo, každý se s námi pozdravil pokynutím hlavy. Jako poslední přišel sám Pythagoras. Všichni studenti i představení se zvedli a uklonili se mu. On všem pokynul hlavou a usedl. Vystřídalo se několik řečníků z řad studentů i představených. Všichni nás vřele vítali a přáli nám hodně štěstí. Připomínali nám naše povinnosti i výsadní postavení, které jsme přijetím do školy získali. Ze všeho se nám točila hlava. Nadešla ta nejvzácnější chvílka. Po jednom jsme přistupovali k Pythagorovi, ten nám podal důtky příslušející členům Pythagorejské školy a my mu přísahali oddanost. Pak nám podal ruku.

Nakonec pronesl řeč i on, zakončil ji slovy: „Jak je naší tradicí, vyzvu nyní studenta posledního ročníku, aby zadal našim nováčkům úlohu. Nejúspěšnější z řešitelů se stane prefektem nováčkovského ročníku. Vyzívám proto Parmenida¹, nejlepšího studenta posledního ročníku, aby přednesl svou úlohu.“

S-IV-2-1

Je dán čtverec $ABCD$ a bod X na jeho straně BC . Jakých hodnot může nabývat poměr obvodu trojúhelníku ABX ku obvodu čtverce $ABCD$? Kdy je poměr obvodů stejný jako poměr délek úseček BC a BX a jaký je v tom případě poměr obsahu trojúhelníku ABX ku obsahu čtverce $ABCD$?

Atriem to jen zašumělo. Pythagoras pokýval hlavou: „Nyní se odeberte do sálu v západním křídle, to bude vaše místo studia. Je tam vše, co budete potřebovat. Dejte se do práce, zdá se, že vás milý Parmenides nešetřil!“

Vydali jsme se tedy do našeho sálu a dali se do řešení. Každý si něco kreslil na svou tabulku. Mně jde ale řešení úloh nejlíp, když si o tom můžu s někým popovídat, a nejlépe s Doubravkou. Za nedlouho jsme měli řešení hotové a tak jsme šli odevzdat své tabulky Parmenidovi. Sokrates se k nám přidal.

Parmenides je pečlivě zkoumal. My jsme si mezitím prohlíželi palác. Došli jsme až do velkého sálu, kde stálo mnoho stolů, u každého několik učenců nad nějakými svitky. Bohužel nás tam odtud honem vyhnali.

„To by mě zajímalo, co to tam dělají,“ dumala Doubravka.

„Mě též, zdá se, že by to mohli být architekti. Ovšem nerozumím, proč je jich takové množství a proč jsme nemohli vidět jejich plány,“ uvažoval Sokrates. Vtom nás volal sluha, že se máme vrátit do západního křídla, aby mohl Parmenides vyhlásit naše výsledky.

„Milí studenti,“ začal Parmenides, „tři z vás úlohu vyřešili velmi uspokojivě, jsou jimi Kristián z Bohemie, Doubravka z Bohemie a Sokrates z Athen. Mezi vámi je třeba nyní zvolit jediného.“

Skočil jsem mu do řeči: „Velký Parmenide, snad se nebudeš zlobit, když se já i Doubravka funkce prefekta vzdáme ve prospěch Sokrata. Prokázal velké znalosti matematiky a navíc je místní a vyzná se i v mravech Pythagorejců. My cizinci se teprve rozkoukáváme.“

„Jak si přejete. Souhlasíš, Doubravko?“ Doubravka kývla. „A ty, So-

¹kolem r. 540 př. n. l., Parmenides se teoreticky s Pythagorem setkat mohl, ale nejsou o tom nejmenší zmínky a proti hraje i to, že Pythagoras působil v Krotónu a Parmenides v Elei

krate?“ I on přikývl. „Tak tedy rozhodnuto, prefektem nováčkovského ročníku nechť je Sokrates z Athen.“ Všichni jsme se mu poklonili.

Doubravka se ke mně naklonila: „Co to mělo znamenat?“

„Musíš uznat, že my jsme měli daleko silnější zbraně než on. Nikdy neslyšel o algebře a jak ji využívat. Navíc, on bude vážně lepším průvodcem než někdo z nás.“ Doubravka se na mě souhlasně usmála.

Parmenides pokračoval: „Vzhledem k tomu, že naše škola dostala velmi důležitý a zároveň tajný úkol, kterému se musí věnovat všichni starší členové řádu, budete se po nějakou dobu věnovat samostudiu. Nechal jsem vám poslat materiály. S jakýmkoli problémem se obraťte na prefekta. Ten smí vyhledat mě.“ S těmi slovy odešel. Rozdali nám svitky, ale nám se do čtení moc nechtělo.

„Tam ti architekti asi pracovali na tom důležitém a tajném úkolu.“

„Také bych řekl,“ souhlasil Sokrates.

„Proč jim ale nesmíme pomáhat? Jsme přece řádní členové,“ rozčilovala se Doubravka.

„Co kdybysme tomu přišli na kloub?“ navrhl jsem. A Sokrates překvapivě souhlasil. Domluvili jsme se, že při odpolední siestě se znovu do velkého sálu vydáme.

Odpoledne, když všichni po jídle podřimovali, jsme se znovu vkradli do sálu. Všude byli poházené svitky, asi s nepovedenými náčrtky. Na obrovském stole byl plán velkolepého paláce. Hlavní dóm měly tvořit dvě obdélníkové budovy, které měly splňovat určitou vlastnost. Zdálo se, že si architekti zatím nevědí rady.

S-IV-2-2

Narýsuj takový obdélník $ABCD$, jehož délka kratší strany se rovná délce delší strany jemu vepsaného obdélníku $EFGH$, přičemž E a G jsou středy stran AD a BC .

„Pojďte, vezmeme si s sebou několik úloh. V klidu je v západním křídle vyřešíme a řešení necháme tady. Uvidíme, jestli nás pak nepřijmou mezi sebe!“

„Teda Doubravko, to je perfektní nápad!“

„Je nebezpečný, ale dobrý. Musíme být nanejvýš obezřetní. Za naše počínání bychom mohli být z řádu vyloučení.“

„Dobře, tak každý najdeme jednu úlohu a mizíme,“ usmívala se Doubravka. Nedalo se jí odolat. Chvíli jsme hledali každý sám, pak mě Doubravka volala

k úloze o pravidelném n -úhleníku.

S-IV-2-3

Za palácem má být altán ve tvaru pravidelného n -úhelníku. V každém jeho vrcholu má být sedátko. Cesty mezi jednotlivými sedátky tvoří strany mnohoúhelníku a jeho úhlopříčky. Otázka zní, kolika způsoby lze projít cestami od jednoho sedátka přes všechna sedátka právě jednou a skončit opět u toho prvního. Přesně zní úloha takto:

Je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se všemi svými úhlopříčkami. Kolika způsoby lze projít všechny jeho vrcholy tak, že vyjdeme z vrcholu A_1 , postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každý z vrcholů A_2, A_3, \dots, A_n projdeme právě jednou a skončíme opět ve vrcholu A_1 .

Problém tím ale nekončil. Našel jsem ještě úvahy o plánované stříšce altánu. Základ té střechy byl opět pravidelný n -úhleník. Její pokrytí by mělo být sestaveno z trojúhelníkových dílů vyrobených z kruhových plátů o daném poloměru r . Otázka byla, jaký je obsah takového dílu.

S-IV-2-4

Pravidlený n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ je rozdělen na shodné trojúhelníky

$$A_iSA_{i+1},$$

kde S je střed n -úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$. Jaký je obsah každého z trojúhelníků, jestliže poloměr kružnice jemu opsané je r .

„Sokrate, my s Kristiánem máme vybráno. Jak jsi na tom ty?“

„Já mám již také pěknou úlohu, řeknu vám ji u nás!“

Rychle jsme z velkého sálu zmizeli. Bylo to v poslední chvíli, siesta už končila a architekti se začali vracet. Nechtěli jsme je potkat ani na chodbě, abychom nebyli podezřelí.

V sále v západním křídle jsme se pustili do řešení. Byly to celkem těžké úlohy. Nedivím se, že si s nimi architekti nevěděli hned rady.

Uvědomili jsme si, že řešení musí být nutně závislé na počtu vrcholů n . Sokrates ještě podotkl, že na tom budou záviset velikosti i vnitřních úhlů trojúhelníků, a to samozřejmě ovlivní vztah pro obsah trojúhelníku. S Doubravkou jsme se shodli, že je nejvyšší čas zasvětit Sokrata do tajů algebry. Byli jsme vážně překvapeni, jak mu to snadno šlo.

Celé odpoledne jsme měli co dělat. Když jsme byli hotovi, přišla na řadu Sokratova úloha.

„Tak povídej, jakou úlohu jsi našel ty?“

„Jedná se o kašny v zahradě. Má jich být celkem šest, ale to už je zadání, tak poslouchejte:“

S-IV-2-5

Na zahradě má být šest kašen. Každá z nich je spojena přímými cestami s dalšími čtyřmi kašnami. Tyto cesty se nikde nekříží. Zajímavé je to, že všechny cesty mají jednu ze tří různých délek. Nejkratší měří 10 m, nejdelší 40 m. Kolik měří zbývající cesty?

„To je opravdu zajímavá úloha.“

„Myslím, že nejdůležitější je, rozmyslet si, jak budou ty kašny rozmístěny. Když zjistíme to, pak spočítat délku cesty bude snadné.“

„Doubravka má pravdu,“ souhlasil Sokrates. „Nejlepší bude nakreslit si obrázek.“

Společnými silami jsme úlohu vyřešili. Skončili jsme akorát tak s večerkou. Byl čas jít do postele. Uložili jsme se, ale už teď jsme se nemohli dočkat druhého dne, kdy odneseme naše řešení do velkého sálu. Půjdeme tam hned ráno.

„Vstávat, vstávat. Co to s vámi je, že vás nemůžu dostat z postelí?“

Aha, děda a jeho rozcvička. Vyskočili jsme s Doubravkou z postelí. To byl zase den. Nebo noc? Už aby byl večer!