

Zadání 2. série VI. ročníku kategorie STUDENT Svá řešení zasílejte do 16. prosince 2007

Náš zadávající nás odvedl do místnosti, kde jsme se posadili a dali se do luštění problému. Řešení bylo překvapivě jednoduché a tak jsme za chvíli byli hotovi. Sroloval jsem pergamen a odložil ho stranou. „Kde to jsme?“ začal jsem se zajímat.

„Myslím, že ve vedlejší místnosti než je ta podivínova,“ odpověděla mi hbitě Doubravka. „To je ale přeci jedno. Hlavní je, že už jsme to konečně vyřešili, takže jsme zase o krok blíž domů. Půjdeme už konečně najít tu studovnu?“

Procházeli jsme chodbou, která byla lemována vitrínami. V každé byl nějaký matematický problém z oblasti teorie čísel. „Zajímalo by mě, kdo tuhle sbírku vytvořil,“ pronesl jsem do ticha chodby a věděl, že Doubravku to zajímá taky. Ani jeden z nás ale nezačal nad tímto problémem spekulovat. Najednou Doubravka vykřikla: „Na konci chodby jsou vidět otevřené dveře. Myslíš, že to bude studovna?“

„Určitě,“ odpověděl jsem, „podívej, támhle je cedulka.“ Za chvíli jsme stáli uvnitř a nestačili se divit. Obrovskou místnost vyplňovaly police s tisíce knihami. Regály hrály všemi barvami a uprostřed místnosti stál stůl plný pootevíraných knih. Zadumaný muž, který jim před tím nabízel pomoc, zvedl oči. „Už jste přišli na řešení vašeho úkolu?“

„Ano, už to máme.“

„Výborně. Tady je váš třetí a poslední úkol v tomto dni.“ Ani jeden z nás nechápal, jak se dá poznat, jestli je den nebo noc. Nikde na stěnách nebyly hodiny a místnosti byly bez oken. Muž jim udělal místo na stole. „Až budete hotovi i s tímto úkolem, zavedu vás do pokoje.“

S-VI-2-1

*Dokažte, že vytvoříme-li k jakémukoli přirozenému číslu číslo, které se liší jen v pozici cifer, pak rozdíl těchto dvou čísel je vždy dělitelný devíti.*¹

Doubravka chtěla oslovit muže sedícího za stolem, ale nevěděla, jak se jmenuje. Tak vybrala nejpříjemnější způsob. „Prosím vás, pane.“ Muž zareagoval: „Aha, už vím, na co jsem zapomněl. Chtěl jsem se vám představit. Jsem Ferdinand Klobouk. Budu vás provázet celou Cestou. Ale dost už o mně! Co jste chtěla?“

¹Příklad: $7\ 066\ 834 - 4\ 678\ 306 = 2\ 388\ 528 = 9 \cdot 265\ 392$.

„Chtěla jsem vám jenom oznámit, že už jsme to vyřešili,“ řekla nesměle Doubravka a usmála se na něj.

„Výborně. Tak tedy můžeme jít.“

Odešli jsme ze studovny. Pan Klobouk ji pečlivě zamkl a schoval klíč do kapsy. Pohyboval se velmi tiše a ani se neohlédl, jestli jdeme za ním. Bylo slyšet cinknutí. „Co to bylo?“ šeptl jsem.

„Viděla jsem, jak panu Kloboukovi něco vypadlo z kapsy.“ Oba jsme se sehnuli a hledali něco neobvyklého na podlaze. Nebylo těžké to najít, z podlahy by se dalo totiž i jít. Zvedl jsem klíč a chtěl jsem ho podat panu Kloboukovi. „Kde je?“ vyklouzlo mi, ale ani Doubravka to nevěděla. Byli jsme v celé chodbě sami. Už jsme se zase ztratili.

„Podívej, támhle někdo je.“ Dohonili tajemnou postavu. „Dobrý den. Nevíte jak se dostaneme do našeho pokoje?“

„Dobrý den, vy jste se vydali na Cestu?“ odpověděl neznámý. Němě jsme přitakali. „Tak v tom případě běžte rovně a na prvním křížení chodeb se dejte doprava,“ poradil nám.

„Tak to máme štěstí, že jsme vás potkali, děkujeme!“ Hned jsme se vydali cestou, kterou nám popsal. Dorazili jsme ke dveřím a vzali za kliku. Dveře ale nešly otevřít. „Jak dál?“ zeptali jsme se dvojhlasně. Bylo to jasné, byly zamčené na číselný kód. Musíme ho rozluštit.

S-VI-2-2

Najděte takové přirozené číslo n , aby součet $2007^n + 2008^n + 2009^n$ byl dělitelný pěti.

Vzhledem k předcházející průpravě jsme na řešení přišli bleskově. Ale jaksi jsme si s ním nevěděli rady. Nakonec nám to došlo. Musím uznat, že to bylo chytré kódování. Šťastně jsme prošli dveřmi.

„Kam jste se mi ztratili? Všude jsem vás hledal,“ překvapil nás náš průvodce. Doubravka si vzpomněla na klíč a řekla: „Vypadl vám z kapsy klíč a my jsme ho zvedali. V tu chvíli jste se nám ztratil. Už jsme ale tady.“

„Ach tak, děkuji.“ Pan Klobouk vstoupil do prázdného pokoje. Stěny byly pokryty obrazy, ale jinak v místnosti vůbec nic nebylo. „Ale, kde budeme spát?“ zeptal jsem se zničeně, protože už jsem byl unavený.

„Hned to zařídím,“ uklidňoval mě pan Klobouk. Sehnul se, zamumlal pár slov a ve vzdálenějším rohu se objevila skříňka s pár tlačítky. Pomocí tohoto ovládání si vybavíte pokoj, jak budete potřebovat. Váhavě jsme poděkovali a nevěřícně koukali na skříňku. Že by nějaký počítač? Pan Klobouk se na nás

povzbudivě usmál a odešel. „Tak Doubravko, jak si to tu vybavíme? Vypadá to, že tu budeme ještě dlouho.“ S nadějí jsme zvolili tlačítko start.

„Pro návrh pokoje nejprve vložte plán místnosti,“ odpověděl nám počítač. Rozhlédli jsme se dokola. Místnost byla ve varu nepravidelného čtyřúhelníku. To bylo tak jediné, co jsme dokázali říct. Zvolili jsme tedy možnost konvexní čtyřúhelník, ale počítač chtěl doplnit rozměry.

„Zkusíme zvolit nápovědu, Kristiáne?“

„Tím snad nic nezkazíme.“

„Pro vytvoření plánu místnosti nejprve dokažte pomocné tvrzení.“

S-VI-2-3

Mějme libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a jeho úhlopříčky AC a BD . Posuneme-li úhlopříčku AC v posunutí \vec{BD} , kde obrazem bodů A, C jsou body A', C' , pak vzniklý rovnoběžník $AA'C'C$ má dvojnásobný obsah vzhledem k původnímu čtyřúhelníku. Dokažte.

Úloha vlastně nebyla tak složitá, jak se na první pohled zdála. Stačilo si jen namalovat ten správný obrázek a pak už to bylo vidět. Doubravka překreslila náš důkaz do počítače.

„Výboně,“ odpověděl, „toto tvrzení vám pomůže při sestrojení plánu vaší místnosti.“

S-VI-2-4

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho úhlopříček AC a BD , velikosti úhlů při vrcholech A a C a velikost střední příčky EF , což je spojnice středů stran AB a CD .

Geometrické úlohy. No sláva, že jsme pryč z teorie čísel. Už jsme té dělitelnosti měli dost. Stačilo vážně využít nějaké věty o shodnosti a předchozího rovnoběžníku a čtyřúhelník byl sestrojen. Tentokrát jsem se pokusil výsledek do počítače převést já.

„Děkuji za vložené údaje. Zpracovávám. Vyhodnoceno. Prosím, zvolte jednotlivé předměty a jejich umístění.“

„Hlavně postele, Kristiáne,“ pustila se do toho Doubravka. „A také nějaký stůl a židle. A lampičky.“ Za chvilku jsme měli pokoj hotový. Bylo na čase, usínali jsme skoro ve stoje.

„Dobré ráno, Doubravko,“ probouzel jsem se příšerně brzo.

„Dobré ráno, Kristiáne. Máš taky takový hlad? Pojď najít něco k snídani.“ Vyšli jsme z pokoje a zůstali stát jako opaření. Ocitli jsme se totiž v

chodbě s vitrínami plnými úloh z teorie čísel.

„Všiml sis včera, že bychom tudy šli do pokoje?“ zeptala se mě Doubravka. Ale než jsem stihl zareagovat, odpověděl jí někdo jiný. „To jste si ani nemohla všimnout, slečno,“ řekl usmívající se pan Klobouk. „Naše chodby se noc co noc mění, proto každý člen našeho společenství má při sobě vždy mapu s aktuálním uspořádáním. Ale přes den je to bezpečné.“

„Tak to jsme rádi, že to víme,“ řekla Doubravka. „Kdybychom to ale věděli už včera, tak bychom nemuseli bloudit,“ zašeptala mi do ucha, aby to pan Klobouk neslyšel.

„Jistě máte hlad. Běžte se najíst do jídelny a já si vás tam pak vyzvednu. Máte se vskutku nač těšit.“

Vyrazili jsme podle jeho pokynů a došli do místnosti s optimistickým názvem předsálí jídelny. Už jsme si ale mohli zvyknout, že ne vše, co se tu jeví nadějně, také nadějně je. Předsálí byla nevelká místnost s trojúhelníkem uprostřed. Ovšem strážil ji jakýsi číšník.

„Dobré ráno! Než vstoupíte do jídelny, abyste nasitili své žaludky, dodejte potravu také své mysli. Pozorně poslouchejte, co je třeba udělat.“

S-VI-2-5

Je dán trojúhelník ABC . Sestrojte co nejkratší lomenou čáru $AXYC$ tak, aby body X, Y byly po řadě vnitřními body úseček BC, AB . Jak závisí podmínky řešitelnosti na velikostech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC ?

Proč nemůžeme dostat alespoň snídani bez nějakých podmínek. S prázdným žaludkem na takové těžké úkoly. Ale jak se říká, hlad je nejlepší kuchař, tak je asi i celkem dobrý geometr. Opět stačilo využít to něco málo, co víme o shodnostech a lomená čára byla na světě. A snídaně také!