

Zadání 5. série VI. ročníku kategorie STUDENT

Svá řešení zasílejte do 25. května 2008

Ráno nás pan Fermat už čekal: „Slíbil jsem vám, že vám dám úlohu, která vás dostane do kteréhokoli patra potřebujete. Tak tedy poslouchejte:“

S-VI-5-1

Dva matematici si rozdělí dílky čokolády tak, že první sní všechny krajní dílky zatímco druhý všechny vnitřní. Jaké rozměry (v dílcích) má čokoláda mít, aby oba snědli stejnou část čokolády?(Najděte všechna řešení.)

Tak to byla zvláštní úloha. Ta představa, jak matematici jí čokoládu. Ale je celkem typické, že si na to musí vymyslet nějaké pravidlo. Na první pohled to byla úloha jednoduchá, ale dalo nám zabrat přijít na to, jak ukázat, že už máme všechna řešení.

„Pane Fermate, už to máme hotové,“ oslovila našeho hostitele Doubravka.

„No to je výtečné. Jaká škoda, že nechcete pracovat v našem patře. Ale já své slovo držím, do kterého patra byste chtěli?“

„To je těžká otázka. My vlastně nevíme. My bychom rádi našli východ z tohoto domu,“ přiznal jsem.

Fermat se na nás zamyšleně podíval: „Aha, tak vy nás chcete opustit úplně. Tak to mě mrzí dvojnásob. Nu, co se dá dělat. Jen mě mrzí, že vám nemohu dobře poradit. Já vlastně také nevím, v jakém patře je východ. Ale víte co, mohli byste zkusit patro finitní matematiky. Říká se, že oni tam něco vědí.“

„Tak moc děkujeme.“ Rozloučili jsme se s panem Fermatem a pomocí naší mapy jsme se vydali do místnosti her v patře finitní matematiky.

„Jejda. Už jste tu?“ překvapil nás nějaký muž.

„No jsme tu, ale nevím jestli to jsme my, na které čekáte.“

„Ale jistě, vy musíte být Doubravka s Kristiánem. Dovolte mi, abych se představil, jmenuji se Dirichlet.“

„Těší nás, ale jak to, že nás znáte?“

„Vždyť o vás mluví celý dům. Těšil jsem se, až se s vámi setkám. Ale povídejte, co pro vás mohu udělat.“

„No, popravdě hledáme východ,“ řekla s nadějí Doubravka.

„Tak to není jednoduchý úkol. Ale jedna možnost by tu byla. Máme tady na patře jednu místnost. Nikdo z nás tam nechodí, ale říká se, že právě tam je možné vystoupit z našeho krásného světa. Jen si nejsem jistý, kam se odtamtud dostanete.“

„My to zkusíme, jak najdeme tu místnost?“ ptal jsem se nadšeně.

„No, ani to není tak jednoduché. Musíte projít takovou speciální cestu. Podívejte,“ vzal do ruky naší mapu, „nejprve byste se museli dostat do této místnosti, tam by se vám ukázala další cesta.“ Dirichlet ukázal na místnost označenou na mapě šachovým koněm. Za ní už na mapě nebylo nic.

„A jak se tam dostaneme?“ zeptala se Doubravka.

„Tak to by pro vás nemělo být tak těžké. Stačí vyřešit jedinou úlohu a mapa vás tam přenese. A nezapomeňte, jste v patře, které vedu já – Dirichlet.“

S-VI-5-2

Dokažte, že mezi 12 různými dvojcifernými přirozenými čísly existují vždy taková dvě, jejichž rozdíl je dvojciferné číslo se stejnými ciframi.

Na to musí jít člověk chytře. Stačilo by rozdělit si zkoumaná čísla od 10 do 99 na ty správné skupinky. Ještěže nám pan Dirichlet tak dobře poradil. Hned, jak jsme tuhle úlohu vyřešili, zkusili jsme se přenést a vyšlo to! Ocitli jsme se v místnosti, kde bylo mnoho šachových stolků. Všude byly rozehrané jakési podivné partie, ale ani jedna nebyla normální. Někde byly samé královny, jinde samí jezdcí. Na jednom stolku ležel jen lístek.

S-VI-5-3

Najděte největší možný počet králů na běžné šachovnici, kteří nemohou jeden druhého porazit (žádný žádného neohrožuje).

„No, tak to zkusíme,“ zasedla Doubravka rázně k prázdnému šachovému stolku. „Jak je to vlastně s králem v šachách?“

„Ten může jet jen jedno políčko buď rovně nebo šikmo.“

„Tak to moc daleko nedojede, to nebude těžké. Myslím, že si budeme muset šachovnici nějak chytře rozdělit na oblasti jednoho krále a pak je tam naskládat.“

Pustili jsme se do práce. Chvilí nám to trvalo, ale nakonec jsme si byli jistí, kolik králů může na šachovnici stát.

Nic se nedělo. Mapa se vůbec nezměnila. „A co teď?“

„Co zkusit ty krále na šachovnici postavit?“ navrhla Doubravka. Řekl jsem si, proč ne. A samozřejmě měla pravdu. Jen jsme postavili posledního krále, mapa se rozrostla o další místnost. Hned jsme se tam přesunuli.

„To se mi nezdá. Jako opravdu vždycky? No to je divné. A jak to mám jako udělat?“

Byli jsme v úplně obyčejné místnosti, kde za stolem seděl mladík.

„Dobrý den,“ oslovil jsem ho opatrně. „Nevíte, kudy bychom se dostali dál?“

„Ale kam dál?“ podíval se na nás nechápavě mladík.

„Hledáme východ, měl by tu být někde na patře. Šachová místnost nás poslala sem.“ vysvětlovala Doubravka.

Mladík se na nás dlouze podíval a bylo vidět, že se mu v hlavě rodí plán. „Vy musíte být ti dva, no jak se jmenujete, Kroupavka a Distián, že ano.“

„Skoro přesně, Doubravka a Kristián.“

„Ano, ano. No, já bych vám mohl poradit, ale to byste museli nejprve poradit vy mně.“

„A s čím bys potřeboval poradit,“ povzdychl jsem si.

„Poslouchejte:“

S-VI-5-4

Mám tady tři krabičky a v každé z nich jsou dvě kuličky. V jedné krabičce jsou obě kuličky bílé, ve druhé jsou obě kuličky černé a ve třetí je jedna kulička bílá a druhá černá. Na krabičkách jsou nápisy, kde která kulička je, ale všechny tři jsou špatně. Já smím otevřít jen jednu krabičku a poslepu z ní vytáhnout jednu kuličku. Pak, podle toho, jakou kuličku vytáhnu, musím určit barvy kuliček ostatních. Poradte mi, jak to udělat.

Zase jsme za někoho dělali jeho domácí úkol. Jen doufám, že to bude stát za to. Ten mladík vypadá jako pěkně mazaný chytrák, který ale zatím v matematice moc nedokázal. Ale nevádí. Ani tahle úloha nebyla nakonec tak těžká.

„No, to koukám,“ prohlížel si mladík naše řešení. „To by mě nenapadlo. To bylo vážně chytrý.“

„Hmm, to jo, ale teď nám porad, kudy dál,“ přerušila ho Doubravka.

„Tak to nevím úplně přesně. Ale vím, že vás šachová místnost nemusela poslat v cestě dál tím správným směrem. Záleží na tom, jestli jste vyřešili tu pravou úlohu. Nebyl tam náhodou ještě jedna úloha?“

Tak nám nezbylo nic jiného, než se vrátit do šachové místnosti. Rozhlíželi jsme se po ostatních stolcích a opravdu. Našli jsme ještě jeden, na kterém ležela cedulka. Ta šachovnice ale byla větší a nestály na ní šachové figurky.

S-VI-5-5

Na polích šachovnice 10x10 jsou napsaná přirozená čísla tak, že rozdíl libovolných dvou sousedů (sousedí spolu celou stranou čtverce) není větší než pět. Dokažte, že vždycky jsou si alespoň dvě čísla na šachovnici rovna.

Vůbec jsme nevěděli, kde začít. Zkoušeli jsme si zase šachovnici nějak rozdělit, jak nám poradil pan Dirichlet, ale nevěděli jsme jak. Pak nás napadlo najít si největší a nejmenší číslo a dát je co nejdál od sebe. To už bylo lepší. Nakonec se podařilo úlohu dokázat.

Na mapě se objevila nová místnost. Snad je to ta správná. Chytlí jsme se s Doubravkou za ruku a přesunuli se do ní.

Byla to malá, úplně prázdná místnost, která měla místo jedné zdi průhledné sklo. Za ním byl matně vidět archív. Ano, jsme u cíle. Pomalu jsme se blížili ke sklu. Snad půjde normálně projít.

„Počkejte!“ zadunělo nám za zády. Tam stáli všichni. Všichni, s kým jsme se tu setkali. Byl tu pan Gausský, Dirichlet i Fermat. „Přece byste neodešli bez rozloučení.“ Podívali jsem se na sebe s Doubravkou. To je pravda, nerozloučili jsme se. Tak úporně jsme hledali východ ven.

„Jsme moc rádi, že jsme se s vámi setkali. Máme ve vás nadějně učedníky. Dovolte nám předat vám jmenovací listiny.“ Dostali jsme do rukou pergameny s našimi jmény a slavnostním písmem jmenování *Řádným matematikem*.

„Děkujeme vám,“ řekli jsme dojatě. „Na těch několik dní s vámi nikdy nezapomeneme.“

„Sbohem!“

Tak jsem prošli skleněnou zdi.

„Tak jak jste na tom, už jste hotovi?“

Cože, děda, já úplně zapomněl.

„Ale vždyť jste skoro ani nezačali. Tak šup do práce, ať to máme z krku.“

Jsme doma. Teda v archívu, ale doma. A těch pár dnů snad ani nebylo. Podíval jsem se na Doubravku. Ale bylo. My dva to víme, byli jsme tam.

Tahle úloha už stála za to. Konečně jsme se trochu zapotili. Já jsem na to šel přes průběhy funkcí a Doubravka zase přes algebraické řešení rovnic. Ale dobré bylo, že jsme došli k témuž.

„Vy byste byli obrovskou oporou pro naše patro! Nechcete zůstat?“ Oba jsme bez váhání zavrtěli hlavou. „To je škoda,“ řekl posmutněle zkoušející, „tak alespoň do zítřka. Zítřka ráno vám dám poslední úlohu, která vám umožní jít do kteréhokoli patra si budete přát. Teď se mnou ale povečte a povídejte mi o sobě.“

Nakonec jsme v tomhle podivném patře strávili moc hezký večer. Náš hostitel nám vyprávěl mnohé zajímavé věci o číslech i ze života. Až před půlnocí mi došlo, že to byl asi Fermat, ale jistý jsem si nebyl.